الوحدة السابعة

التحويلات الهندسية
Geometry Transformations

ابتكارات
Innovations

مشروع الوحدة :
(ابداعات هندسية)

يعتبر الابتكار إحدى الحالات العقلية البشرية التي تسعى إلى إيجاد أفكار ووسائل مختلفة لحلّ المشاكل ، ويشكّل الابتكار إضافة حقيقية لمجموع الإنتاج الإنسانيّ ، كما أنّه يحقق فائدة حقيقية على أرض الواقع ، لا سيما إذا ارتبط بالمواضيع التطبيقية . وفي هذا المشروع ، سنتحدث عن كيفية خلق الأفكار الابتكارية والمبدعة من دراسة التحويلات الهندسية .

خطة العمل :

- رسم أشكال منوعة على النظام الإحداثي وعمل عدة تحويلات هندسية لها بحيث يصل إلى ابتكار شكل معين .

خطوات تنفيذ المشروع :

- اختر شكلًا هندسيًا من الأشكال التالية (مثلث ، مربع ، ...) مرسومًا على النظام الإحداثي بحيث يقع أحد رؤوس الشكل المختار على نقطة الأصل.
- حدّد التحويل الهندسي الذي ستوظفه لابتكار شكل محدّد .
- طبق التحويل الهندسي عدة مرات للشكل وصوره .
- حدّد إحداثيات نقاط الشكل الأصلي.
- حدّد إحداثيات الصور الناتجة.
- حدّد قاعدة التحويل الهندسي المستخدم في جدول بدء المشروع .

الشكل	نوع التحويل	عدد مرات التحويل

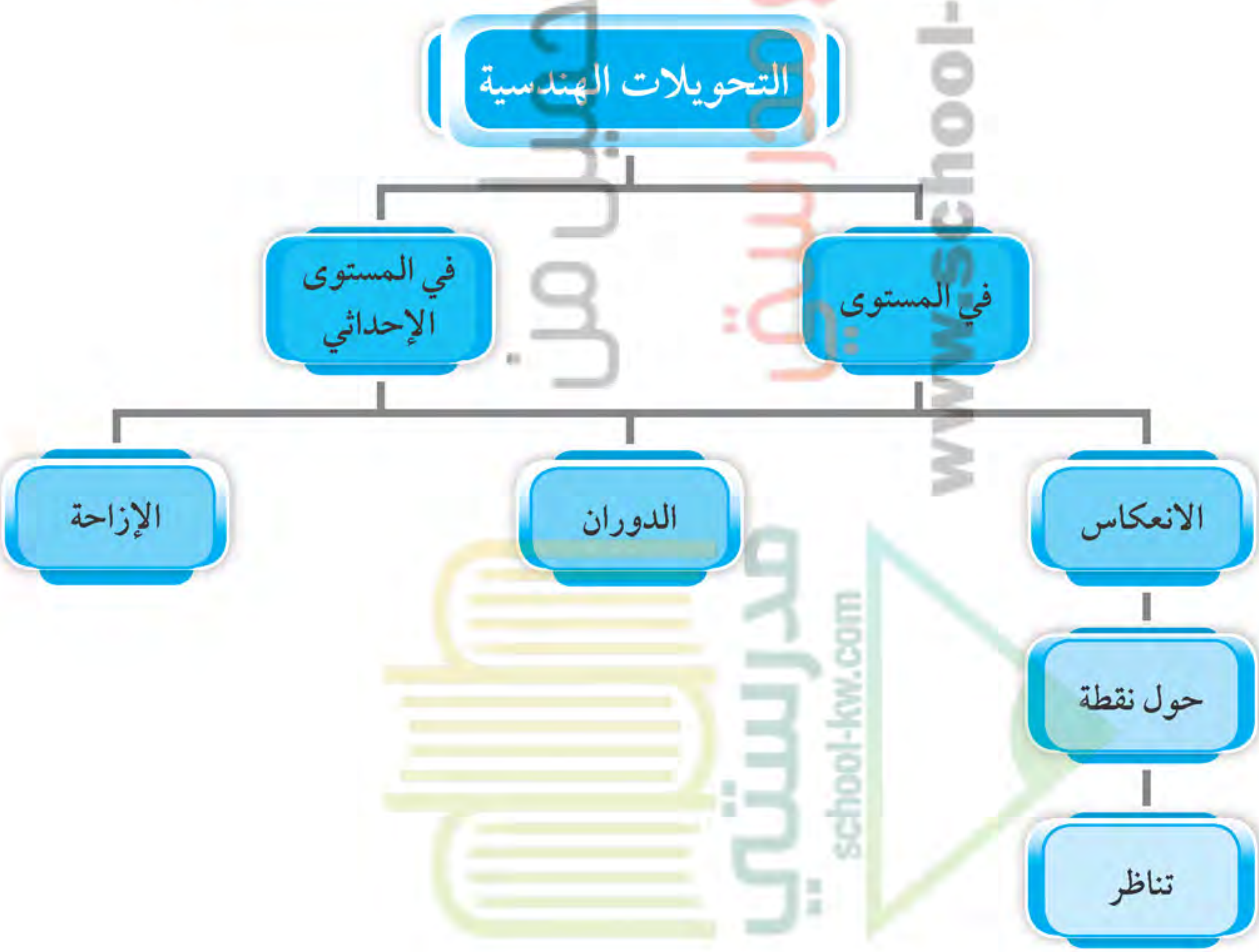
علاقات وتواصل :

- التواصل بين المجموعات لإعطاء تقييم على الابتكار الأجمل وتحديد صحة القاعدة المستخدمة .

عرض العمل :

- تعرض الابتكارات أمام المتعلمين لإعطاء تقدير لكل ابتكار .

مخطَّط تنظيمي للوحدة السابعة



٧-١ الانعكاس في نقطة – التناظر حول نقطة
Reflection of a Point – Symmetry at the Point

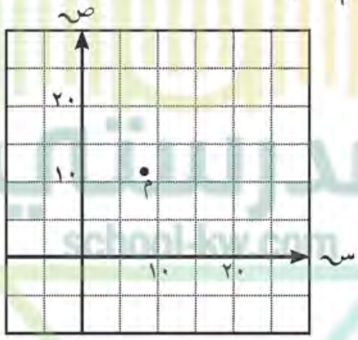
سوف تتعلّم : الانعكاس في نقطة في (المستوى – المستوى الإحداثي) – التناظر حول نقطة .

في كثير من الأحيان ، يلجأ الفنانون التشكيليون وكذلك مصممو برامج الحاسوب إلى استعمال الانعكاس بجميع أنواعه لابتكار لوحات وتصميمات جميلة.

نشاط (١) :

مما سبق دراسته في الصف السابع :

١ أ) أنسب زوج مرتب يمكن أن يمثل إحداثيي النقطة م هو :

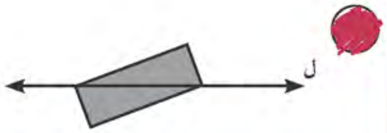


أ (٨ ، ١٥)	ب (٨ ، ٨)
ج (٨ ، ١٢)	د (٩ ، ١٦)

ب) بالنظر إلى الشكل التالي :

بالانعكاس في المستقيم ل فإنَّ صورة الشكل المرسوم هي :

أ


ب


ج


د


العبارات والمفردات :

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

محاور الإحداثيات
Coordinate Axes

المحور السيني س
X-Axis

المحور الصادي ص
Y-Axis

نقطة الأصل
Origin Point

الزوج المرتب
Ordered Pair

الإحداثي السيني
X Coordinate

الإحداثي الصادي
Y Coordinate

التحويل الهندسي
Transformation

الانعكاس في نقطة
Reflection of a Point

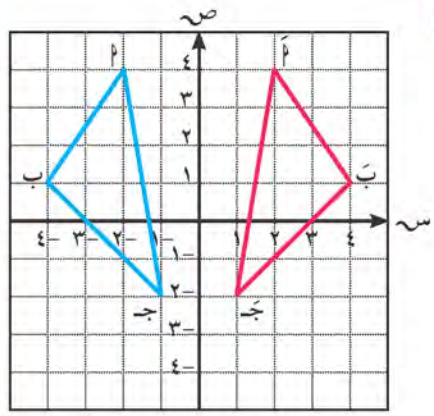
التناظر حول نقطة
Symmetry at the Point

تذكر أنَّ :

(س ، ص) زوج مرتب
س: الإحداثي السيني لأي نقطة يدل على مقدار بعد النقطة يمينًا أو يسارًا عن محور الصادات.
ص: الإحداثي الصادي لأي نقطة يدل على مقدار بعد النقطة لأعلى أو لأسفل عن محور السينات.

٢ حدّد نوع التحويل في كل من الأشكال التالية ، ثم اكتب إحداثي كل نقطة وصورتها :

أ



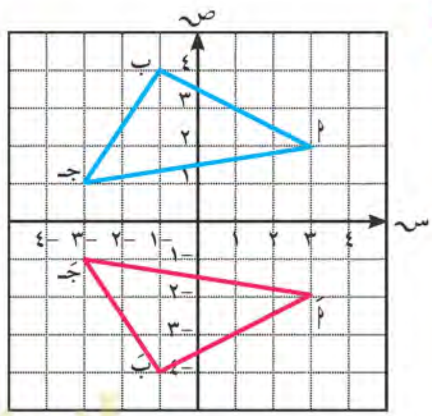
انعكاس من محور الصادي

أ (-٢ ، ٤) ← أَ (٢ ، ٤)

ب (-٤ ، ١) ← بَ (٤ ، ١)

جـ (-١ ، -٢) ← جـَ (١ ، -٢)

ب



انعكاس من محور السيني

أ (٣ ، ٢) ← أَ (٣ ، -٢)

ب (-١ ، ٤) ← بَ (-١ ، -٤)

جـ (-٣ ، ١) ← جـَ (-٣ ، -١)

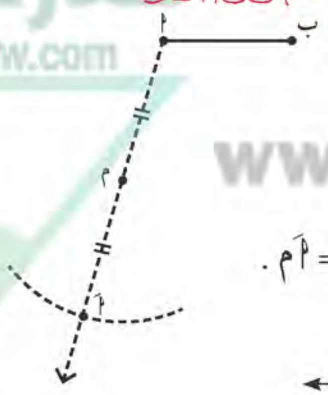
معلومات مفيدة :

- يلاحظ التماثل في ورق الشجر وفي وجه الإنسان وفي رأس الحيوان ، وهذا يدلُّ على عظمة الخالق.
- يكتشف الأطبّاء مثلاً أيّ تغيّر يحدث في وجه الإنسان في الجانب الأيمن عن الجانب الأيسر، ويحدّدون ما إذا كان هناك ورم يمكن علاجه.

الانعكاس في نقطة في المستوى

نشاط (٢) :

اللوازم :
- فرجار
- مسطرة



في الشكل المقابل : رسمت كلًّا من $\overline{أب}$ والنقطة م في المستوى ،

م $\not\in$ $\overline{أب}$ ، رسمنا $\overleftarrow{أم}$ ونأخذ عليه أَ بحيث : أم = أَم .

نسمي أَ صورة النقطة أ بالانعكاس في النقطة م.

- باستخدام المسطرة ارسم $\overleftarrow{ب م}$ كما تم رسم $\overleftarrow{أم}$.
- باستخدام الفرجار قس طول $\overline{ب م}$.
- بنفس فتحة الفرجار ثبت السن عند م ، ثم ارسم قوسًا يقطع $\overleftarrow{ب م}$ في نقطة ولتكن بَ .
- صل أَ ، بَ لتحصل على $\overline{أَبَ}$.

نسمي أَ ، بَ صورتي النقطتين أ ، ب بالانعكاس في النقطة م .

وأيضًا $\overline{أَبَ}$ صورة $\overline{أب}$ بالانعكاس في النقطة م .

تذكر أنَّ :

(١) يُغيّر الانعكاس في المحور السيني الإحداثي الصادي إلى معكوسة الجمعي . أي أن :
أ(س ، ص) ← أَ(س ، -ص)

(٢) يُغيّر الانعكاس في المحور الصادي الإحداثي السيني إلى معكوسة الجمعي . أي أن :
أ(س ، ص) ← أَ(-س ، ص)

مما سبق نستنتج أنَّ :

الانعكاس في نقطة مثل م : هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة أ في المستوى صورة أَ ∈ $\overleftarrow{\text{أم}}$ بحيث تكون أم = أَم . والنقطة الوحيدة التي تقترن بنفسها هي النقطة م التي تسمى مركز الانعكاس ، حيث م نقطة صامدة .

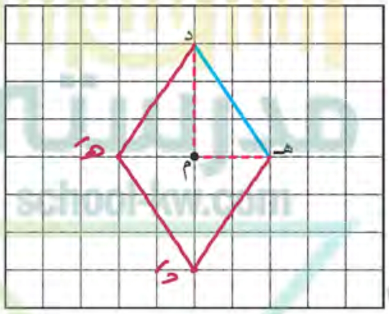
تذكر أنَّ :
النقطة الصامدة هي نقطة تقع على محور الانعكاس .

التناظر حول نقطة في المستوى

نشاط (٣) :

من الشكل المقابل ، أكمل رسم الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ ، بحيث دَ صورة د بالانعكاس في النقطة م ، هـَ صورة هـ بالانعكاس في النقطة م .

أكمل ما يلي :



د ⟵ دَ

هـ ⟵ هـَ

دَ ⟵ د

هـَ ⟵ هـ

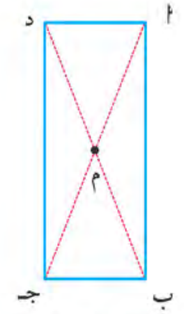
∴ الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ ⟵ الشكل الرباعي دَهـَدهـ بالانعكاس في النقطة م

مما سبق نجد أنَّ الشكل الرباعي د هـ دَ هـَ متناظر حول النقطة م (نقطة تقاطع قطريه).

يقال لشكل هندسي إنَّه متناظر حول نقطة إذا كانت صورته بالانعكاس في هذه النقطة هي الشكل نفسه .

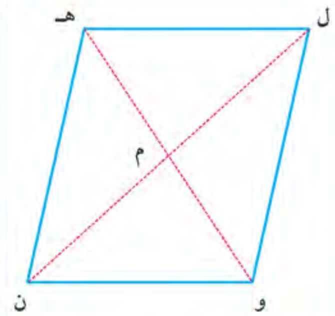
تدرّب (١) :

أي الأشكال التالية متناظر حول نقطة ملتقى قطريه ؟ وضِّح ذلك .



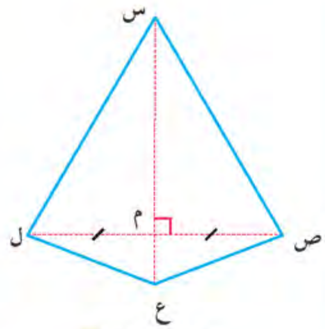
(مستطيل)

متناظر حول نقطة التقاء قطريه لان القطران ينصف كل منهما الآخر



(متوازي أضلاع)

متناظر حول نقطة التقاء قطريه لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر



(طائرة ورقية)

غير متناظر حول نقطة التقاء قطريه لأن القطران لا ينصف كل منهما الآخر

تذكر أنَّ :

- من خواص المستطيل القطران ينصف كلّ منهما الآخر وهما متطابقان.
- في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر.

الانعكاس في نقطة الأصل في مستوى الإحداثيات :

نشاط (٤) :

استعن بالمستوى الإحداثي المقابل و باستخدام المسطرة و الفرجار كما في نشاط (٢) السابق ، أوجد صور النقاط التالية بالانعكاس في النقطة و (نقطة الأصل) :

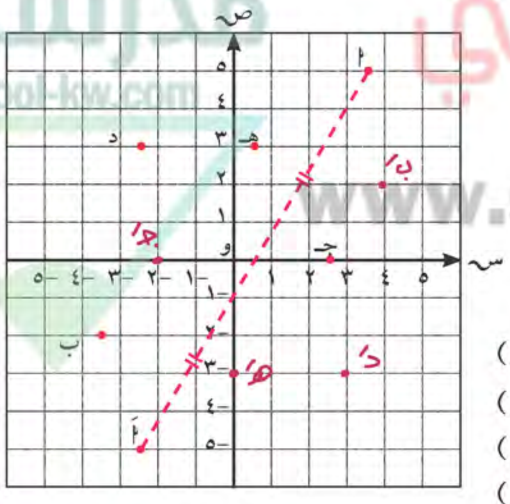
أ (٣ ، ٥) ⟵ أَ (-٣ ، -٥)

ب (-٤ ، -٢) ⟵ بَ (٤ ، ٢)

جـ (٢ ، ٠) ⟵ جـَ (-٢ ، ٠)

د (-٣ ، ٣) ⟵ دَ (٣ ، -٣)

هـ (٠ ، ٣) ⟵ هـَ (٠ ، -٣)



معلومات مفيدة : في الطائرة الورقية القطران متعامدان فقط.

ماذا تلاحظ ؟ يتغير الاحداثيان السيني والصادي الى معكوسهما الجمعي

اللوازم :

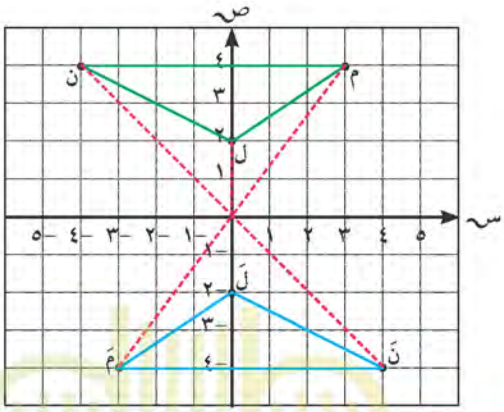
- مسطرة
- فرجار

في المستوى الإحداثي الانعكاس في نقطة الأصل هو تحويل هندسي يعيّن لكل نقطة في المستوى صورة إحداثيها السيني وإحداثيها الصادي وهما المعكوس الجمعي للإحداثي السيني والصادي ، لهذه النقطة .

عمومًا : الانعكاس في نقطة الأصل (و) : أ (س ، ص) $\xrightarrow{ع_و}$ أَ (– س ، – ص)

مثال : إذا كان Δ لَ مَ نَ هو صورة Δ ل م ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت ل (٠ ، ٢) ، م (٣ ، ٤) ، ن (-٤ ، ٤) ، فعين إحداثيات الرؤوس لَ ، مَ ، نَ ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

الحل :



بالانعكاس في و (ع و) :

(س ، ص) $\xleftarrow{ع_و}$ (- س ، - ص)

ل (٠ ، ٢) ⟵ لَ (٠ ، -٢)

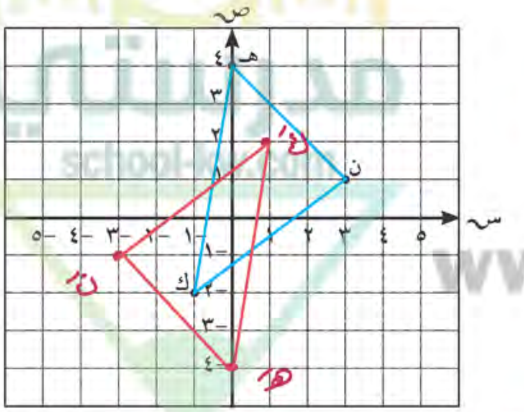
م (٣ ، ٤) ⟵ مَ (-٣ ، -٤)

ن (-٤ ، ٤) ⟵ نَ (٤ ، -٤)

لاحظ أنَّ : الشكل الهندسي وصورته بالإنعكاس في نقطة متطابقان (فسر ذلك) .

تدرَّب (٢) :

إذا كان Δ هـَ كَ نَ هو صورة Δ هـ ك ن بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت هـ (٠ ، ٤) ، ك (-١ ، -٢) ، ن (٣ ، ١) ، فعين إحداثيات الرؤوس هـَ ، كَ ، نَ ، ثم ارسم Δ هـَ كَ نَ في مستوى الإحداثيات .



هـ (٠ ، ٤) $\xleftarrow{ع_و}$ هـَ (٠ ، -٤)

ك (-١ ، -٢) ⟵ كَ (١ ، ٢)

ن (٣ ، ١) ⟵ نَ (-٣ ، -١)

تم تكميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

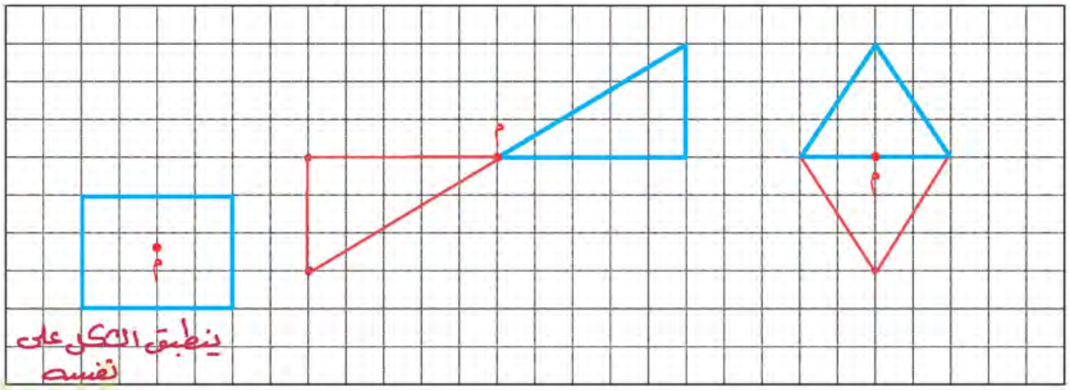
فكِّر وناقِش

يرى خالد أنَّ الانعكاس في نقطة الأصل يكافئ انعكاسًا في المحور السيني يليه انعكاس في المحور الصادي أو العكس . فهل رأي خالد صحيح ؟ فسّر ذلك .

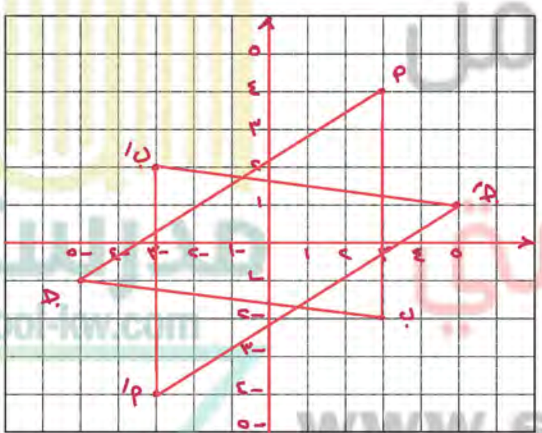
نعم رأي خالد صحيح ، لان الاحداثيان السيني والصادي يتغيران الى معكوسهما الجمعي

تمــرَّنْ :

١ ارسم صورة كل شكل من الأشكال التالية بالانعكاس في النقطة م .



٢ إذا كان Δ أَ بَ جَـ هو صورة Δ أ ب جـ بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت أ (٣ ، ٤) ، ب (٣ ، -٢) ، جـ (-٥ ، -١) ، فعيّن إحداثيات الرؤوس أَ ، بَ ، جَـ ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

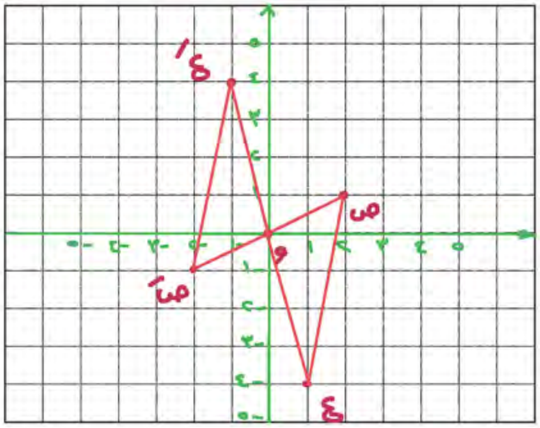


أ(٣،٤) $\xrightarrow{ع_و}$ أَ(-٣،-٤)

ب(٣،-٢) $\xrightarrow{ع_و}$ بَ(-٣،٢)

جـ(-٥،-١) $\xrightarrow{ع_و}$ جَـ(٥،١)

٣ إذا كان Δ و صَ عَ هو صورة Δ و ص ع بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت و (٠ ، ٠) ، صَ (−٢ ، −١) ، عَ (−١ ، ٤) ، فعيّن إحداثيات الرؤوس و ، ص ، ع ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .

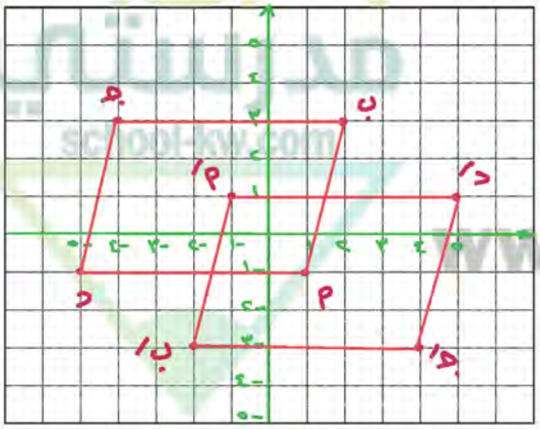


و (٠ ، ٠) ← ع و ← و (٠ ، ٠)

ص (٢ ، ١) ← ع و ← صَ (−٢ ، −١)

ع (١ ، −٤) ← ع و ← عَ (−١ ، ٤)

٤ إذا كان الشكل الرباعي أَ بَ جـَ دَ هو صورة الشكل الرباعي أ ب جـ د بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ، وكانت أ (١ ، −١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (−٤ ، ٣) ، د (−٥ ، −١) .



فعين إحداثيات الرؤوس أَ ، بَ ، جـَ ، دَ ثم ارسم الشكلين الرباعيين في مستوى الإحداثيات .

قد يساعدك هذا التصميم الهندسي في تصميم أشكال هندسية على برامج الحاسوب (مثلًا الفوتوشوب) الخاصة بك .

أ (١ ، −١) ← ع و ← أَ (−١ ، ١)

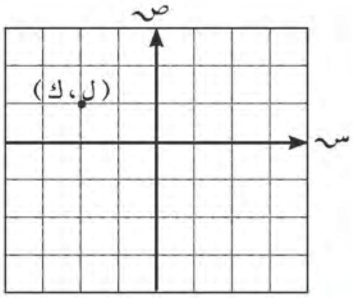
ب (٢ ، ٣) ← ع و ← بَ (−٢ ، −٣)

جـ (−٤ ، ٣) ← ع و ← جـَ (٤ ، −٣)

د (−٥ ، −١) ← ع و ← دَ (٥ ، ١)

TIMSS 2019 ٥ في المستوى الإحداثي المرسوم عينت النقطة (ل ، ك) فيه .

أي العبارات التالية ليست صحيحة ؟



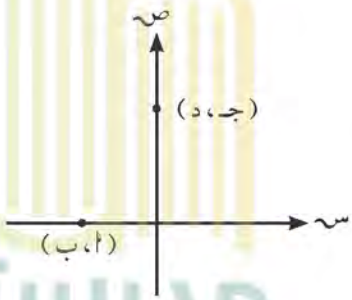
(أ) ل × ك < ٠

(ب) ل < ك

ل + ك = ٠

(د) ك عدد موجب

TIMSS 2019 ٦ بالنظر إلى الشكل المرسوم ناتج كلّ مما يلي : مساوٍ للصفر ما عدا



(أ) أ × ب

(ب) أ × جـ

أ × د

(د) ب × جـ

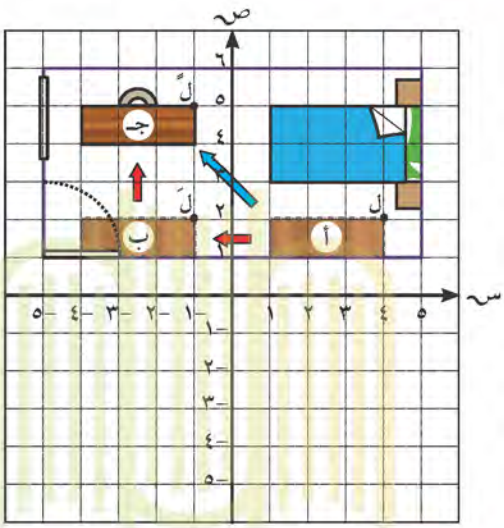
٢-٧ الإزاحة في المستوى الإحداثي
Translation in a Coordinate Plane

العبارات والمفردات :
الإزاحة
Translation

معلومات مفيدة :
يستخدم مخرجو أفلام الرسوم المتحرّكة بالحاسوب الإزاحات لتحريك الأشكال على الشاشة.

سوف تتعلّم : رسم الإزاحة في المستوى - كتابة قاعدة الإزاحة .

نشاط :



أراد راشد أن يعيد تنظيم غرفته (كما في الشكل) فحرك مكتبه من الوضع (أ) إلى الوضع (ب) وانتهى به إلى الوضع (جـ) . صف التغير الذي أجراه راشد على مكتبه ، وأكمل ما يلي :

إذا كانت ل (٤ ، ٢) إحدى نقاط المكتب فإنَّ :

١ ل (٤ ، ٢) ⟵ لَ (-١ ، ٢)

٢ لَ (-١ ، ٢) ⟵ لً (-١ ، ٥)

ل (٤ ، ٢) ⟵ لً (-١ ، ٥)

لاحظ التغيير في كل من الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لكل نقطة مع صورتها .

٣ ل (٤ ، ٢) ⟵ لً (٤ + (-٥) ، ٢ + ٣)

٤ هل يمكنك أن تعين صورة أي نقطة من نقاط المكتب وفق القاعدة :
(س ، ص) ⟵ (س + (-٥) ، ص + ٣) ؟

٥ هل تغيرت أبعاد المكتب خلال إزاحته من الوضع (أ) إلى (ب) ثم إلى (جـ) ؟
لا

الإزاحة هي : تحويل هندسي يسمح لنا بالحصول على صورة أي شكل من خلال نقل كل نقطة فيه مسافة ثابتة على خط مستقيم وفي اتجاه محدّد ،
ولا تغير الإزاحة من الشكل وقياساته .

وتكون الإزاحة في اتجاه محوري الإحداثيات وفق الجدول التالي :

النقطة	صورة النقطة تحت تأثير الإزاحة	
(س ، ص)	الإزاحة جهة **اليمين** بمقدار (أ) وحدة (س + أ ، ص)	الإزاحة **إلى أعلى** بمقدار (ب) وحدة (س ، ص + ب)
	الإزاحة جهة **اليسار** بمقدار (أ) وحدة (س − أ ، ص)	الإزاحة **إلى أسفل** بمقدار (ب) وحدة (س ، ص − ب)

عمومًا:

(س ، ص) ⟵ (س + أ ، ص ± ب)

تدرّب (١) :

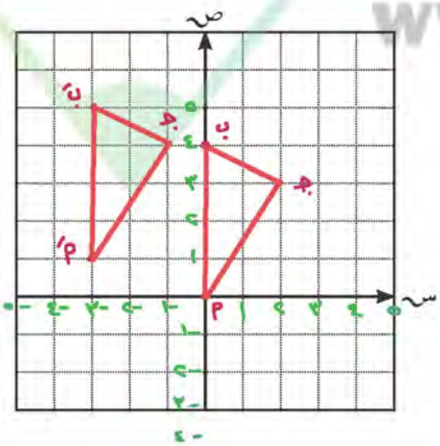
أوجد صورة النقطة أ (−٣ ، ٥) تحت تأثير إزاحة ٤ وحدات إلى اليمين ، ثم وحدتين ونصف إلى الأسفل .

القاعدة : (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص − ٢ $\frac{1}{2}$)

أ (−٣ ، ٥) ⟵ أَ (−٣ + ٤ ، ٥ − ٢ $\frac{1}{2}$)

أ (−٣ ، ٥) ⟵ أَ (١ ، ٢ $\frac{1}{2}$)

تدرّب (٢) :



في المستوى الإحداثي ، ارسم المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه هي أ (٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤) ، جـ (٢ ، ٣) ثم ارسم صورة المثلث أ ب جـ تحت تأثير إزاحة قاعدتها :

(س ، ص) ⟵ (س − ٣ ، ص + ١)

أ (٠ ، ٠) ⟵ أَ (−٣ ، ١)

ب (٠ ، ٤) ⟵ بَ (−٣ ، ٥)

جـ (٢ ، ٣) ⟵ جـَ (−١ ، ٤)

مثال :

إذا كانت مَ (−٣ ، ٥) هي صورة النقطة م (٢ ، ١) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، أوجد قاعدة الإزاحة ثم تحقق من صحتها :

(س ، ص) ⟵ (س + أ ، ص + ب)

الحل : نعلم أنَّ قاعدة الإزاحة هي : م (٢ ، ١) ⟵ مَ (٢ + أ ، ١ + ب)

∵ م (٢ ، ١) ⟵ مَ (−٣ ، ٥)

(الإحداثي السيني)	(الإحداثي الصادي)
٢ + أ = −٣	١ + ب = ٥
أ = −٣ − ٢	ب = ٥ − ١
أ = −٥	ب = +٤
٥ وحدات لليسار	٥ وحدات للأعلى

(س ، ص) ⟵ (س − ٥ ، ص + ٤)

التحقق: (٢ ، ١) ⟵ (٢ − ٥ ، ١ + ٤)

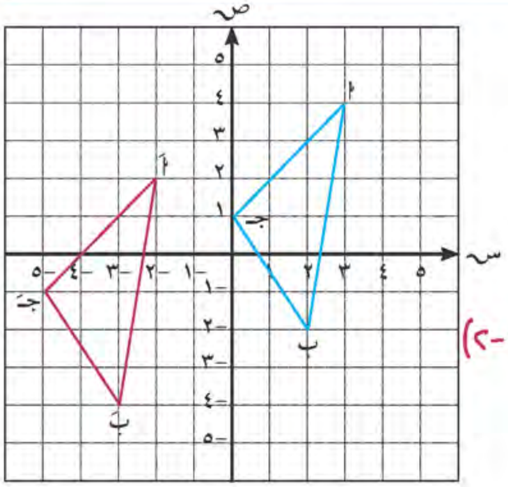
∴ (٢ ، ١) ⟵ مَ (−٣ ، ٥)

تدرّب (٣) : أكمل الجدول التالي :

القاعدة	(س ، ص) ⟵ (س + ٣ ، ص − ٢)			
النقطة	(−١ ، ٥)	(−٣ ، −٤)	(٠ ، −٣)	(−٤ ، ٣)
الصورة	(٢ ، ٣)	(٠ ، −٦)	(٣ ، −٥)	(−١ ، ١)

تمــرَّنْ :

١ أوجد صورة النقطة (٤ ، −٣) تحت تأثير إزاحة ٣ وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى الأعلى . (٧ ، −١)



٢ أ صف الإزاحة التي تنقل المثلث أ ب جـ إلى المثلث أَ بَ جـَ ، ثم اكتب القاعدة بصورة رمزية .

٥ وحدات الى اليسار

وحدتان الى الاسفل

(س ، ص) ⟵ (س − ٥ ، ص − ٢)

ب في التمرين السابق ، اكتب إحداثيي رؤوس Δ أ ب جـ ، ثم أوجد صورة كل منها تحت تأثير إزاحة قاعدتها : (س ، ص) ⟵ (س + ١ ، ص − ٢)

أ (٣ ، ٤) ⟵ أَ (٤ ، ٢)

ب (٢ ، −٢) ⟵ بَ (٣ ، −٤)

جـ (٠ ، ١) ⟵ جَ (١ ، −١)

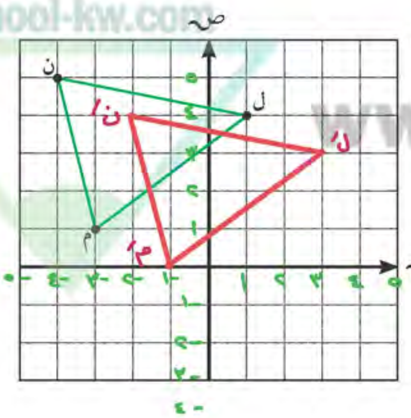
٣ إذا كانت مَ (−٣ ، ٢) هي صورة م (٢ ، −١) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فاكتب القاعدة بصورة رمزية لهذه الإزاحة ثم تحقق من صحتها .

(س ، ص) ⟵ (س − ٥ ، ص + ٣)

م (٢ ، −١) ⟵ (٢ − ٥ ، −١ + ٣) = (−٣ ، ٢)

٤ ارسم صورة المثلث ل م ن بإزاحة حسب القاعدة :

(س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص − ١)



ل (١ ، ٤) ⟵ لَ (٣ ، ٣)

م (−٣ ، ١) ⟵ مَ (−١ ، ٠)

ن (−٤ ، ٥) ⟵ نَ (−٢ ، ٤)

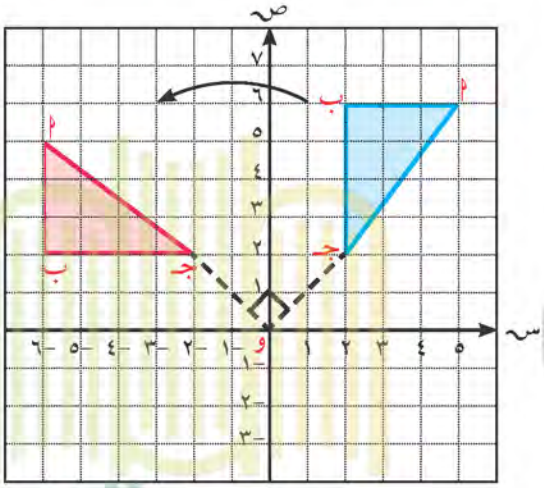
تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

٧-٣ الدوران في المستوى الإحداثي
Rotation in a Coordinate Plane

سوف تتعلّم : الدوران في المستوى وقواعده ، كيفية إيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :
الدوران
Rotation

نشاط (١) :



تم رسم Δ أ ب جـ على شبكة المستوى الإحداثي .

١ ثبت ورقة شفافة على المستوى وقم برسم Δ أ ب جـ والمحاور على الورقة الشفافة .

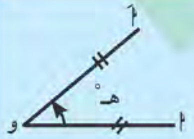
٢ ثبت سن دبوس عند النقطة (و) وقم بتدوير الورقة الشفافة في اتجاه ضد حركة عقارب الساعة حتى ينطبق محور السينات في الورقة الشفافة على محور الصادات في المستوى الأصلي لنحصل على موضع جديد للمثلث أ ب جـ وليكن Δ أَ بَ جـَ .

معلومات مفيدة :
يستخدمُ النجّارون المخاريطَ الدورانيّة لخلق تصميماتٍ متناظرةٍ (متماثلة) .

- **بم نسمي التحويل الهندسي الذي ينقل Δ أ ب جـ إلى Δ أَ بَ جـَ ؟**

نسمي التحويل الهندسي السابق بالدوران ، والذي ينتج عنه تدوير شكل ما حول نقطة نسميها مركز الدوران ، ولا يغير الدوران من الشكل أو قياساته .

الدوران : هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة أ في المستوى نقطة أخرى أَ بحيث أ ⟵ أَ ، و أ = و أَ (و تسمى مركز الدوران) و ⟵ و (نقطة صامدة) ، (أ و^ أَ) هي زاوية الدوران وقياسها هـ° .



نرمز إلى الدوران الذي مركزه نقطة الأصل (و) وقياس زاويته (هـ°) بالرمز د (و ، هـ°) .

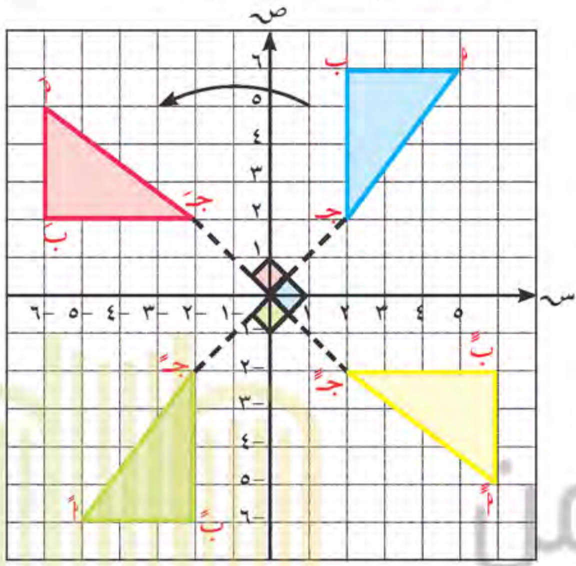
- **يتعين الدوران بثلاثة عناصر :**

(١) مركز الدوران (٢) قياس زاوية الدوران (٣) اتجاه الدوران

تم تحميل الحل من
موقع مدرستي
School-kw.com

نشاط (٢) :

أكمل من النشاط السابق وباستخدام الورقة الشفافة دوّر وارسم صورة ∆ أ ب جـ :



(أ) حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ٩٠° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، ٩٠°) .

(ب) حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ١٨٠° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، ١٨٠°) .

(جـ) حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ٢٧٠° ضد اتجاه حركة عقارب الساعة د (و ، ٢٧٠°) .

(د) أكمل الجدول التالي مستعينًا بالرسم:

الرؤوس / الدوران	أ (٥ ، ٦)	ب (٢ ، ٦)	جـ (٢ ، ٢)
د (و ، ٩٠°)	أَ (-٦ ، ٥)	بَ (-٦ ، ٢)	جَ (-٢ ، ٢)
د (و ، ١٨٠°)	أً (-٥ ، -٦)	بً (-٢ ، -٦)	جً (-٢ ، -٢)
د (و ، ٢٧٠°)	أً (٦ ، -٥)	بً (٦ ، -٢)	جً (٢ ، -٢)

تذكر أنَّ : الدورة الكاملة يكون قياس زاويتها ٣٦٠° .

مما سبق نستنتج أنَّ :

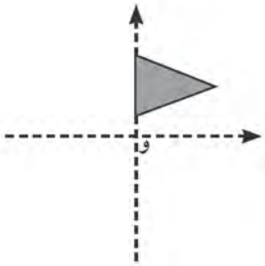
(أ) (س ، ص) $\xrightarrow{\text{د(و، ٩٠°)}}$ (-ص ، س) **يسمى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .**

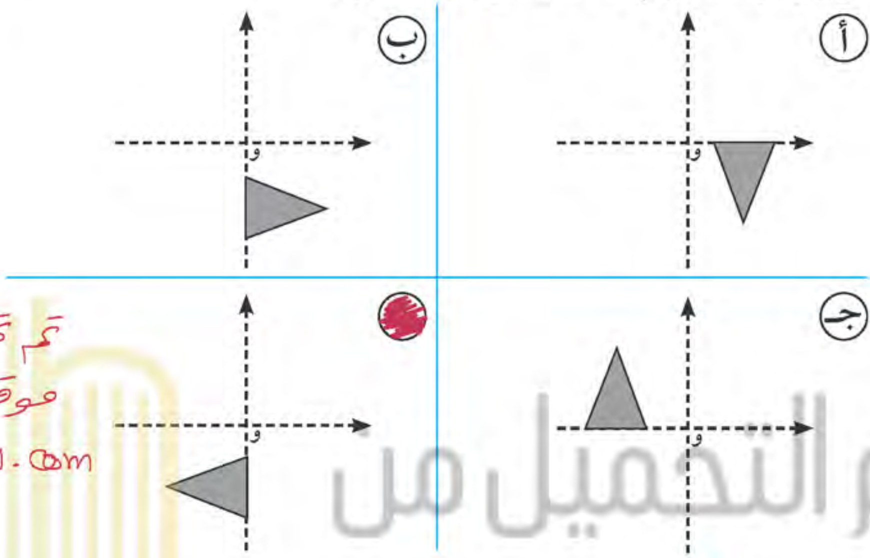
(ب) (س ، ص) $\xrightarrow{\text{د(و، ١٨٠°)}}$ (-س ، -ص) **يسمى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .**

(جـ) (س ، ص) $\xrightarrow{\text{د(و، ٢٧٠°)}}$ (ص ، -س) **يسمى دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة .**

تدرّب (١) :

أي الأشكال التالية يظهر نتيجة دوران الشكل نصف دورة باتجاه عقارب الساعة حول النقطة و ؟





تم تحميل الحل من موقع مدرستي School-kw.com

فكّر وناقِش

يقول عبدالله :

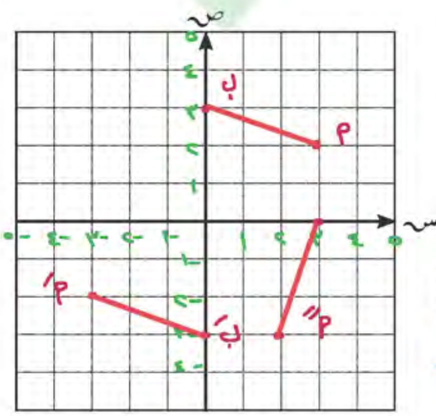
إنَّ الدوران د (و ، ١٨٠°) يكافئ الانعكاس في نقطة الأصل .

هل توافقه الرأي ؟ فسر إجابتك . نعم ، ففي الحالتين يتغير الاحداثيان السيني والصادي الى معكوسهما الجمعي

تدرّب (٢) :

ارسم $\overline{أب}$ التي فيها أ (٣ ، ٢) ، ب (٠ ، ٣)

ثم عين وارسم صورتها تحت تأثير كلٍّ من:



أ د (و ، ١٨٠°)

أ (٣ ، ٢) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠°)}$ أَ (-٣ ، -٢)

ب (٠ ، ٣) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠°)}$ بَ (٠ ، -٣)

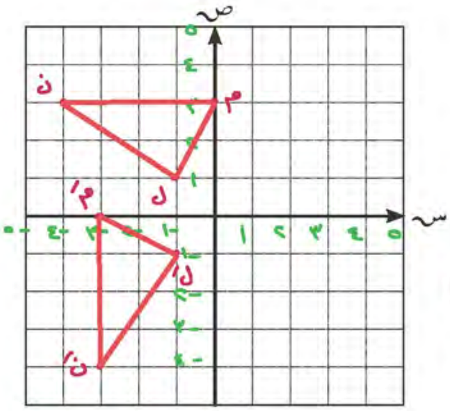
ب د (و ، ٢٧٠°)

أ (٣ ، ٢) $\xrightarrow{د(و، ٢٧٠°)}$ أً (٢ ، -٣)

ب (٠ ، ٣) $\xrightarrow{د(و، ٢٧٠°)}$ بً (٣ ، ٠)

تدرّب (٣) :

في المستوى الإحداثي ارسم المثلث ل م ن بحيث ل (-١ ، ١) ، م (٠ ، ٣) ، ن (-٤ ، ٣) ، ثم ارسم صورته بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته ٩٠° .



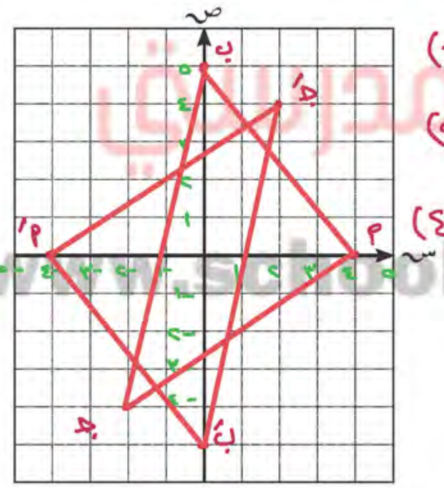
ل (-١ ، ١) $\xrightarrow{د(و، ٩٠°)}$ لَ (-١ ، -١)

م (٠ ، ٣) ⟵ مَ (-٣ ، ٠)

ن (-٤ ، ٣) ⟵ نَ (-٣ ، -٤)

تمــرَّنْ :

١ ارسم صورة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٤ ، ٠) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (-٢ ، -٤) بدوران نصف دورة حول نقطة الأصل .

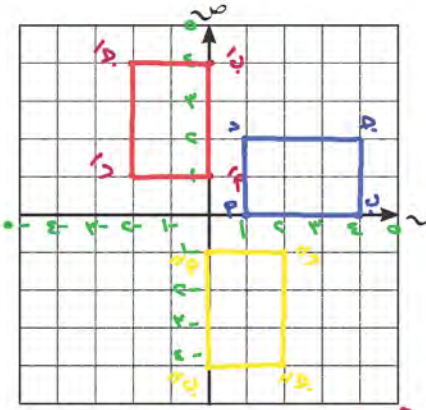


أ (٤، ٠) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠)}$ أَ (-٤، ٠)

ب (٠، ٥) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠)}$ بَ (٠، -٥)

جـ (-٢، -٤) $\xrightarrow{د(و، ١٨٠)}$ جـَ (٢، ٤)

٢ ارسم المستطيل أ ب جـ د الذي رؤوسه أ (١ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠) ، جـ (٤ ، ٢) ، د (١ ، ٢) ، ثم ارسم صورته في الحالات التالية :



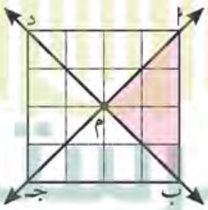
أ د (و ، ٩٠°) | ب د (و ، ٢٧٠°)

أ
أ (١ ، ٠) $\xrightarrow{\text{دوران } ٩٠°}$ أ' (٠ ، ١)
ب (٤ ، ٠) $\xrightarrow{\text{دوران } ٩٠°}$ ب' (٠ ، ٤)
جـ (٤ ، ٢) $\xrightarrow{\text{دوران } ٩٠°}$ جـ' (-٢ ، ٤)
د (١ ، ٢) $\xrightarrow{\text{دوران } ٩٠°}$ د' (-٢ ، ١)

ب
أ (١ ، ٠) $\xrightarrow{\text{دوران } ٢٧٠°}$ أ'' (٠ ، -١)
ب (٤ ، ٠) $\xrightarrow{\text{دوران } ٢٧٠°}$ ب'' (٠ ، -٤)
جـ (٤ ، ٢) $\xrightarrow{\text{دوران } ٢٧٠°}$ جـ'' (٢ ، -٤)
د (١ ، ٢) $\xrightarrow{\text{دوران } ٢٧٠°}$ د'' (٢ ، -١)

في التمارين (٣ - ٤) اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

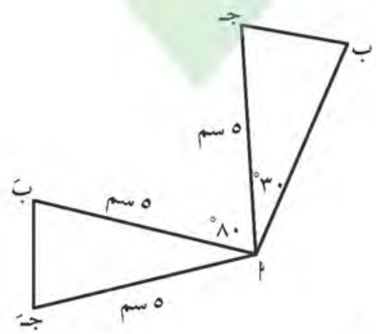
٣ في الشكل المقابل : صورة Δ أ م ب تحت تأثير د (م ، ٢٧٠°) هي :



(أ) Δ د م جـ
(ب) Δ ب م جـ
(جـ) Δ د م أ
(د) Δ أ ب د

TIMSS 2019

٤ المثلث أَ بَ جـَ هو صورة المثلث أ ب جـ بدوران حول أ ، قياس زاويته = ...

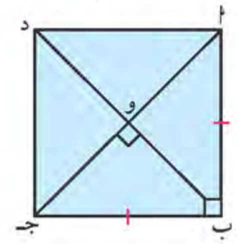


(أ) ٣٠°
(ب) ٨٠°
(جـ) ١١٠°
(د) ١٤٠°

٧-٤ مراجعة الوحدة السابعة
Revision Unit Seven

١ أي الأشكال التالية متناظر حول نقطة مُلتقى قُطريه (أقطاره)؟ ولماذا ؟

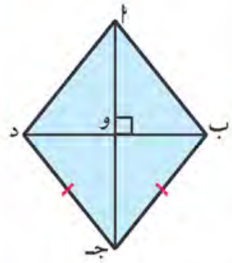
(مربع)



نعم

القطران ينصف كل منهما الآخر

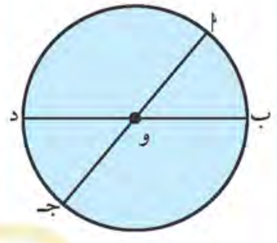
(معين)



نعم

القطران ينصف كل منهما الآخر

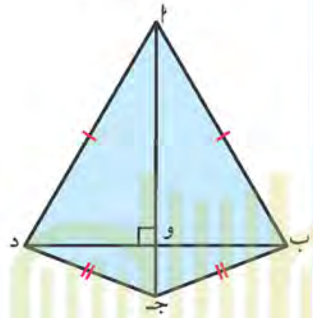
(دائرة)



نعم

لأن (و) هي منتصف أقطار الدائرة كافة

(طائرة ورقية)



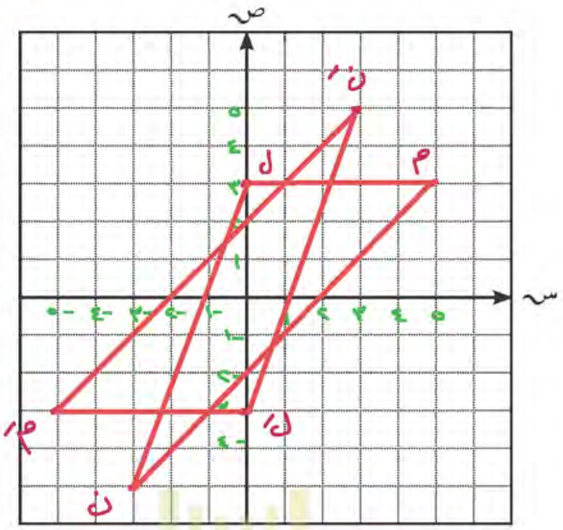
لا

القطران لا ينصف كل منهما الآخر

٢ أكمل الجدول التالي :

النقطة	صورتها بالانعكاس في المحور السيني	صورتها بالانعكاس في المحور الصادي	صورتها بالانعكاس في نقطة الأصل
أ (٤ ، ٥)	(٤ ، -٥)	(-٤ ، ٥)	(-٤ ، -٥)
ب (-٢ ، ٧)	(-٢ ، -٧)	(٢ ، ٧)	(٢ ، -٧)
جـ (-٥ ، -٦)	(-٥ ، ٦)	(٥ ، -٦)	(٥ ، ٦)
د (٠ ، ٩)	(٠ ، -٩)	(٠ ، ٩)	(٠ ، -٩)
هـ (-٥ ، ٠)	(-٥ ، ٠)	(٥ ، ٠)	(٥ ، ٠)

٣ إذا كان المثلث لَ مَ نَ هو صورة المثلث ل م ن بالانعكاس في نقطة الأصل(و)، وكانت ل (٠ ، ٣) ، م (٥ ، ٣) ، ن (-٣ ، -٥) فعيِّن إحداثيات الرؤوس لَ ، مَ ، نَ ، ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات .



ل (٠ ، ٣) $\xrightarrow{ع و}$ لَ (٠ ، -٣)

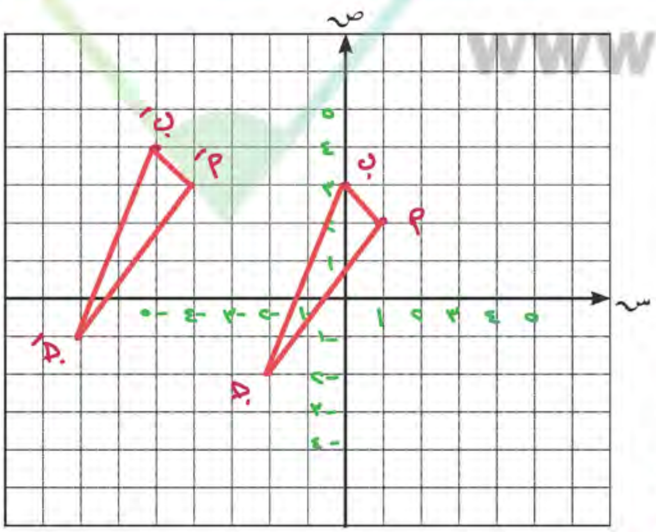
م (٥ ، ٣) $\xrightarrow{ع و}$ مَ (-٥ ، -٣)

ن (-٣ ، -٥) $\xrightarrow{ع و}$ نَ (٣ ، ٥)

٤ أكمل الجدول التالي :

القاعدة	(س ، ص) ⟵ (س - ٢ ، ص + ٥)				
النقطة	(٤ ، ٢)	(-٦ ، ٧)	(٣ ، ٠)	(-٩ ، -٨)	(١ ، -١)
الصورة	(٢ ، ٧)	(-٨ ، ١٢)	(١ ، ٥)	(-١١ ، -٣)	(-١ ، ٤)

٥ مثلث أ ب جـ رؤوسه هي :
(١ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (-٢ ، -٢)
أوجد صور رؤوسه بعد الإزاحة تبعًا للقاعدة :
(س ، ص) ⟵ (س - ٥ ، ص + ١) ،
ثم ارسم المثلثين في مستوى الإحداثيات.



أ (١ ، ٢) ⟵ أَ (-٤ ، ٣)

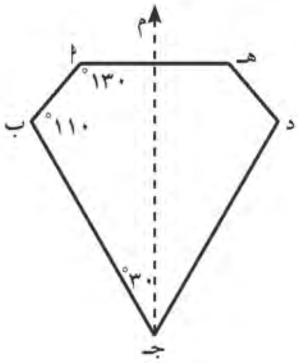
ب (٠ ، ٣) ⟵ بَ (-٥ ، ٤)

جـ (-٢ ، -٢) ⟵ جـَ (-٧ ، -١)

تم تحميل الحل من موقع مدرستي
school-kw.com

TIMSS 2019

٦ إذا كان م محور تناظر للشكل المرسوم ، فإنَّ قياس (ب جـ^ د) = ...



(أ) ٣٠°　　(ب) ٥٠°

(جـ) ٦٠°　　(د) ٧٠°

---

٧ تم التأثير بتحويل هندسي على المثلث أ ب جـ فكان :

للنقطة أ (٢ ، -٣) صورة هي د (٠ ، -٢) ،

للنقطة ب (١ ، ٤) صورة هي هـ (-١ ، ٥)

للنقطة جـ (-٢ ، ١) صورة هي ل (-٤ ، ٢) .

(أ) هل المثلث د هـ ل هو إزاحة للمثلث أ ب جـ ؟

نعم

(ب) إذا كان كذلك ، فما هي قاعدة هذه الإزاحة ؟ وإذا لم يكن كذلك فبيِّن السبب .

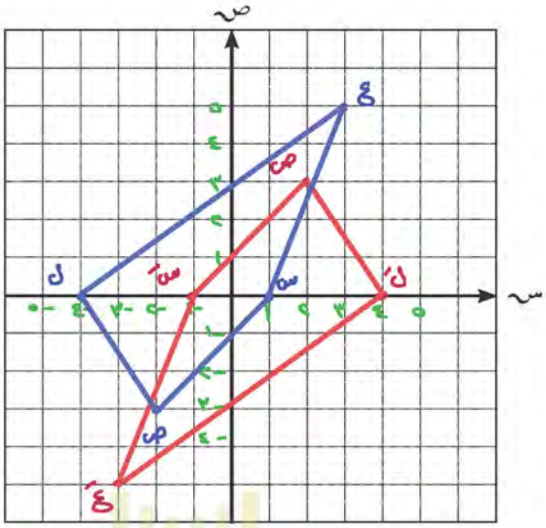
(س ، ص) ⟵ (س - ٢ ، ص + ١)

---

٨ أكمل الجدول التالي :

النقطة	د (و ، ٩٠°)	د (و ، ١٨٠°)	د (و ، ٢٧٠°)
أ (٢ ، ٥)	(-٥ ، ٢)	(-٢ ، -٥)	(٥ ، -٢)
ب (-٣ ، ٤)	(-٤ ، -٣)	(٣ ، -٤)	(٤ ، ٣)
جـ (-١ ، -٧)	(٧ ، -١)	(١ ، ٧)	(-٧ ، ١)
د (-٦ ، ٠)	(٠ ، -٦)	(٦ ، ٠)	(٠ ، ٦)

٩ ارسم صورة الشكل الرباعي س ص ع ل ، حيث س (١ ، ٠) ، ص (−٢ ، −٣) ، ع (٣ ، ٥) ، ل (−٤ ، ٠) بالدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° .



س (١ ، ٠) $\xrightarrow{\text{دوران ١٨٠°}}$ س′ (−١ ، ٠)

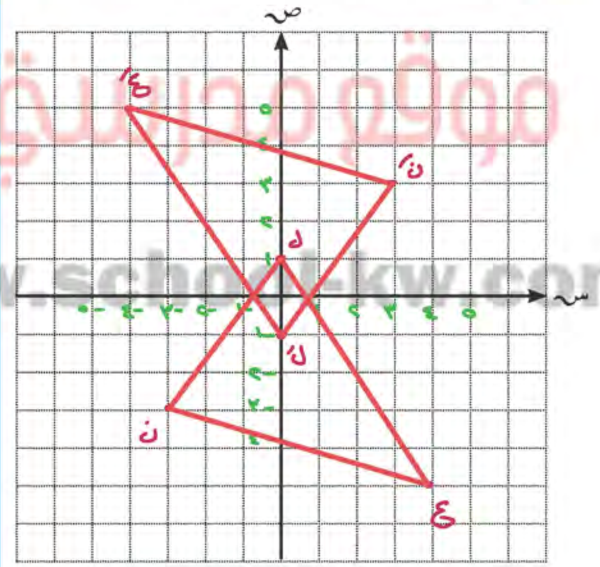
ص (−٢ ، −٣) $\xrightarrow{\text{دوران ١٨٠°}}$ ص′ (٢ ، ٣)

ع (٣ ، ٥) $\xrightarrow{\text{دوران ١٨٠°}}$ ع′ (−٣ ، −٥)

ل (−٤ ، ٠) $\xrightarrow{\text{دوران ١٨٠°}}$ ل′ (٤ ، ٠)

١٠ ارسم Δ ن ل ع حيث ن (−٣ ، −٣) ، ل (٠ ، ١) ، ع (٤ ، −٥) ، ثم عين صورته تحت تأثير كلٍّ من :

أ د (و ، ١٨٠°)

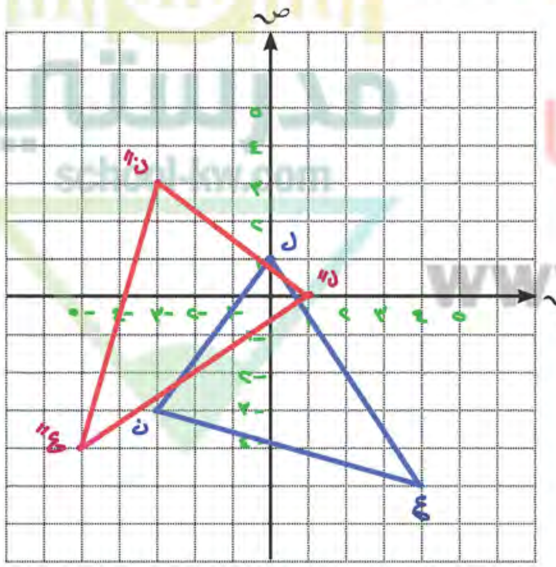


ن (−٣ ، −٣) $\xrightarrow{\text{دوران ١٨٠°}}$ ن′ (٣ ، ٣)

ل (٠ ، ١) $\xrightarrow{\text{دوران ١٨٠°}}$ ل′ (٠ ، −١)

ع (٤ ، −٥) $\xrightarrow{\text{دوران ١٨٠°}}$ ع′ (−٤ ، ٥)

ب د (و ، ٢٧٠°)

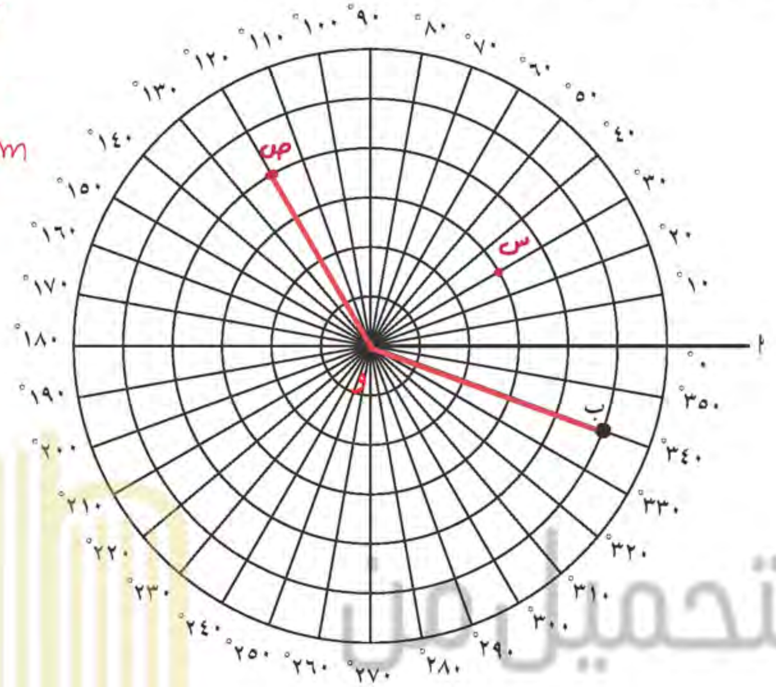


ن (−٣ ، −٣) $\xrightarrow{\text{دوران ٢٧٠°}}$ ن″ (−٣ ، ٣)

ل (٠ ، ١) $\xrightarrow{\text{دوران ٢٧٠°}}$ ل″ (١ ، ٠)

ع (٤ ، −٥) $\xrightarrow{\text{دوران ٢٧٠°}}$ ع″ (−٥ ، −٤)

TIMSS 2019 **١١ يبين الرسم التخطيطي نظامًا لتحديد النقاط :**



في هذا النظام يوصف النقطة (أ) بمسافة البعد عن المنشأ (و) . ومقدار اللفة عكس عقارب الساعة من خط الأساس (و أ) إلى (و ب) وبالتالي إحداثيات ب هي (٥ ، ٣٤٠°) .

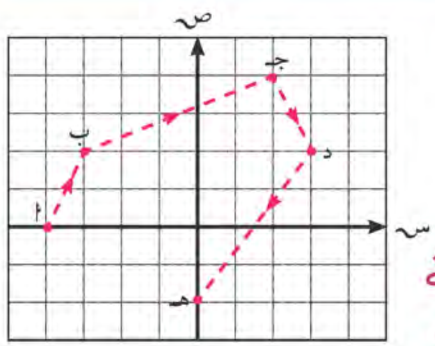
أ عين النقاط س (٣ ، ٣٠°) ، ص (٤ ، ١٢٠°) على الرسم البياني أعلاه .

ب ارسم الزاوية ب و ص ؟ ما هو قياس الزاوية ب و ص ؟

١٤٠°

---

١٢ تحركت سفينة من الميناء (أ) مرورًا ببعض الموانئ إلى أن وصلت في نهاية رحلتها إلى الميناء (هـ) ، صف الإزاحة التي يمكن أن تتحركها السفينة من ميناء إلى آخر بدءًا من الميناء (أ) .



(أ) الى (ب) وحدة الى اليمين ووحدتان الى الاعلى

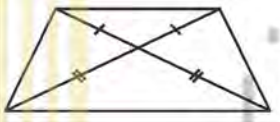
(ب) الى (جـ) ٥ وحدات الى اليمين ووحدات الى الاعلى

(جـ) الى (د) وحدة الى اليمين ووحدات الى الاسفل

(د) الى (هـ) ٣ وحدات الى اليسار و ٤ وحدات الى الاسفل

اِختبار الوحدة السابعة

أوّلًا : في البنود (١ - ٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المربع متناظر حول نقطة مُلتقى قطريه .	●	ب
٢ صورة النقطة أ (- ٣ ، ٥) بالدوران ٩٠° حول نقطة الأصل في اتجاه ضد عقارب الساعة هي أَ (٥ ، ٣) .	أ	●
٣ صورة النقطة أ (٢ ، ٣) بانعكاس في نقطة الأصل يكافئ إزاحة حسب القاعدة (س - ٤ ، ص - ٦) .	●	ب
٤ في الشكل المقابل الشكل متناظر حول نقطة تلاقي قطريه . 	أ	●

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ نَ (٧ ، - ١) صورة ن (٢ ، - ١) تحت تأثير :

(أ) انعكاس في المحور السيني (ب) د (و ، ٢٧٠°) (ج) انعكاس في نقطة الأصل ● إزاحة إلى اليمين ٥ وحدات

---

٦ قياس الدرجة التي تمثل $\frac{1}{4}$ دورة كاملة ضد عقارب الساعة تساوي :

● ٩٠° (ب) ١٨٠° (ج) ٢٧٠° (د) ٣٦٠°

---

٧ صورة النقطة ع (-٢ ، -٤) بالانعكاس في نقطة الأصل (و) هي :

(أ) (٢ ، -٤) (ب) (-٢ ، ٤) ● (٢ ، ٤) (د) (٤ ، ٢)

---

٨ صورة النقطة هـ (-٤ ، -١) باستخدام قاعدة الإزاحة (س ، ص) ⟵ (س + ٥ ، ص - ٤) هي :

(أ) هـَ (١ ، ٣) ● هـَ (١ ، -٥) (ج) هـَ (٩ ، -٥) (د) هـَ (٩ ، ٥)

تم تحميل الحل من موقع
مدرستي
school-kw.com

٩ الانعكاس في نقطة الأصل يكافئ :

(أ) د(و ، ٩٠°)　(ب) د(و ، ١٨٠°)　(ج) د(و ، ٢٧٠°)　(د) د(و ، ٣٦٠°)

---

١٠ إذا كانت مَ (−٥ ، ٩) هي صورة النقطة م (٢ ، ٥) تحت تأثير إزاحة في المستوى الإحداثي ، فإنَّ قاعدة هذه الإزاحة هي :

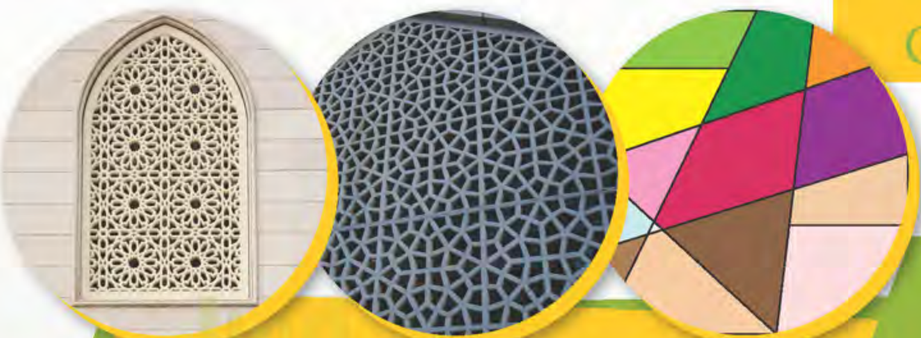
(أ) (س ، ص) ⟵ (س − ٧ ، ص + ٤)　(ب) (س ، ص) ⟵ (س + ٧ ، ص − ٤)

(ج) (س ، ص) ⟵ (س − ٤ ، ص − ٧)　(د) (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص + ٧)

الوحدة الثامنة

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals

تصاميم هندسية
Geometric Designs



مشروع الوحدة :
(تصميم هندسي)

عمليات التصميم الهندسي هي مجموعة من الخطوات التي تتم من أجل إخراج منتج جديد أو نظام جديد .

خطة العمل :

- توظيف أشكال رباعية لتكوين تصاميم هندسية متنافسة ومميزة .

خطوات تنفيذ المشروع :

- في تصميمك ارسم أشكالًا رباعية (مستخدمًا شبكة المربعات ، أدوات هندسية) .
- ضمِّن في تصميمك كل أنواع متوازيات الأضلاع (مستطيل ، معين ، مربع) .
- حدد الأشكال الرباعية المستخدمة في التصميم ، وحلِّل خواصها من حيث (التطابق ، والتماثل ، ... إلخ) بإكمال الجدول.
- استخدم أكثر عدد ممكن من الأشكال الرباعية لتكوِّن التصميم .

اسم الشكل الرباعي	خواص			تماثل	
	الأضلاع	الزوايا	الأقطار	حول محور	حول نقطة

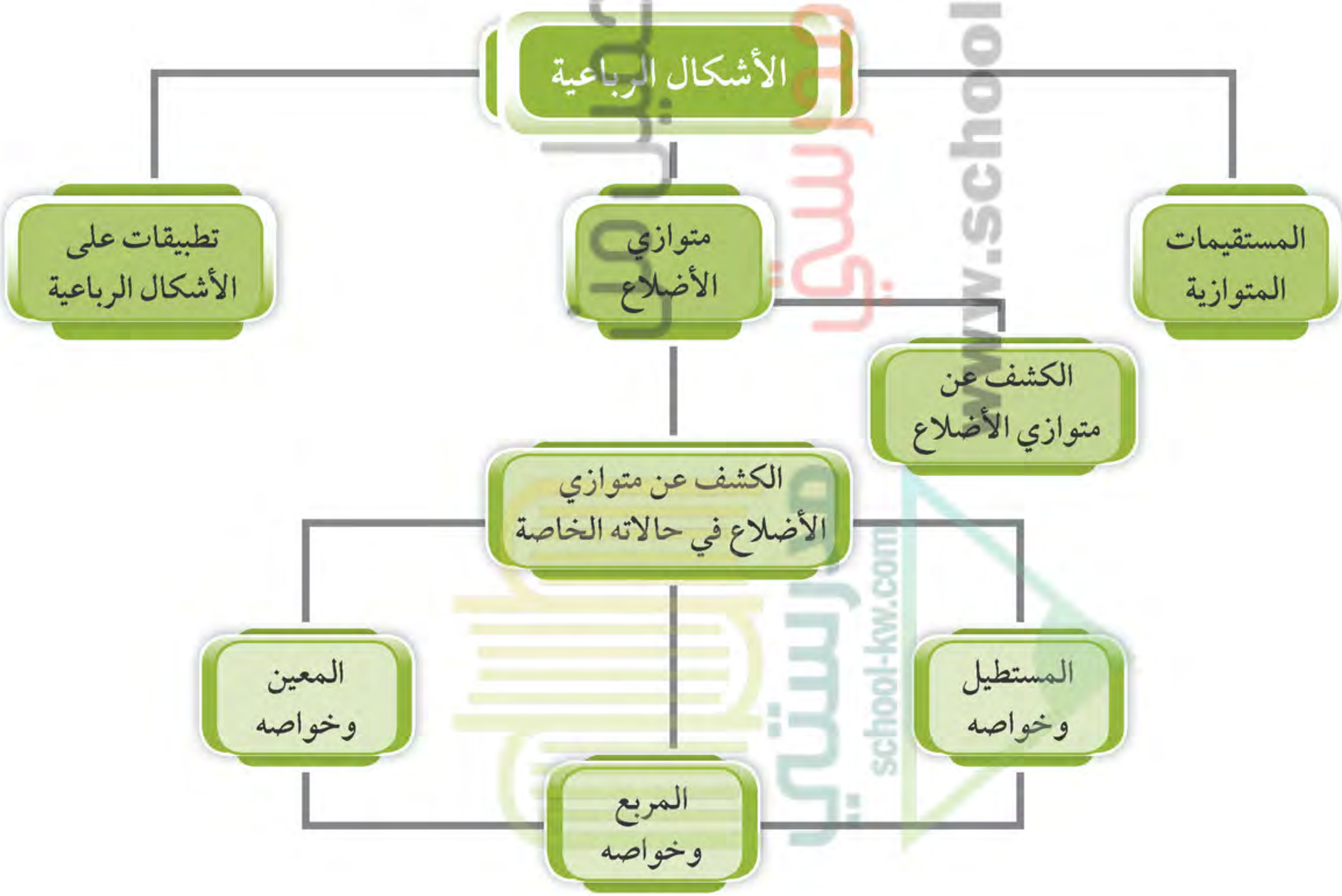
علاقات وتواصل :

- المجموعة الواحدة تصمم عدة تصاميم هندسية ويتم اختيار الأفضل .

عرض العمل :

- كل مجموعة تعرض التصميم النهائي مع الجدول المستخدم .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثامنة



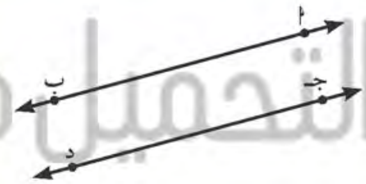
المستقيمات المتوازية
Parallel Lines

١-٨

سوف تتعلّم : العلاقة بين الزوايا الناتجة من قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين .

العبارات والمفردات :
- متوازٍ Parallel
- زوايا متبادلة Alternate Angles
- زوايا متناظرة Corresponding Angles
- زوايا متحالفة Allied Angles

تسمّى الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوى واحد ولا تتقاطع أبدًا **بالخطوط المتوازية** .

الرسم	تقرأ	تكتب بالرموز
	المستقيم (أ ب) يوازي المستقيم (جـ د)	$\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـد}}$

نشاط :

أكمل ما يلي : عندما يقطع مستقيم مستقيمين

تنتج زوايا عددها ٨

من هذه الزوايا زوايا متبادلة وزوايا

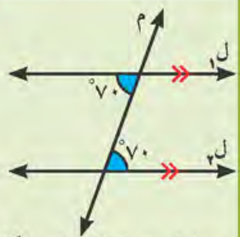
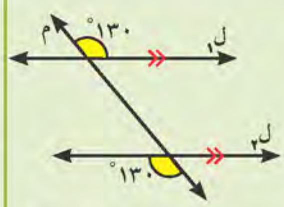
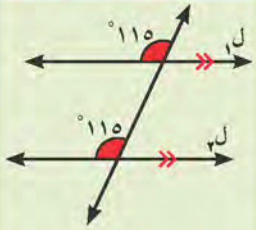
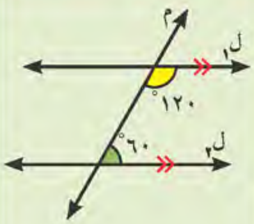
متناظرة ، متحالفة ، متقابلة بالرأس ، متجاورة

أكمل الجدول التالي مستعينًا بالشكل المرسوم :

أزواج من الزوايا المتبادلة	داخليًا	٤ ، ٦ - ٣ ، ٥
	خارجيًا	٢ ، ٨ - ١ ، ٧
أزواج من الزوايا المتناظرة		١ ، ٥ - ٤ ، ٨ - ٣ ، ٧ - ٢ ، ٦
أزواج من الزوايا المتحالفة		٤ ، ٥ - ٣ ، ٦
أزواج من الزوايا المتقابلة بالرأس		١ ، ٣ - ٢ ، ٤ - ٥ ، ٧ - ٦ ، ٨
أزواج من الزوايا المتجاورة		١ ، ٢ - ١ ، ٤ - ٤ ، ٣ - ٢ ، ٣ ٥ ، ٦ - ٥ ، ٨ - ٨ ، ٧ - ٦ ، ٧

معلومات مفيدة :
- في صناعة النسيج تكون الخيوط متوازية ومتعامدة على النول .

ربط الأفكار : إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإنَّ :

كل زاويتين متبادلتين متطابقتان	كل زاويتين متناظرتين متطابقتان	كل زاويتين متحالفتين متكاملتان
 زوايا متبادلة داخليًّا  زوايا متبادلة خارجيًّا		

تذكر أنَّ :
- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°
- الزاويتان المتتامتان مجموع قياسهما ٩٠°

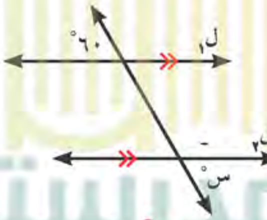
تدرّب (١) :

في كلّ من الأشكال التالية أوجد قيمة (س°) مع ذكر السبب.

١٢٥°
بالتناظر والتوازي

٦٥°
بالتبادل والتوازي

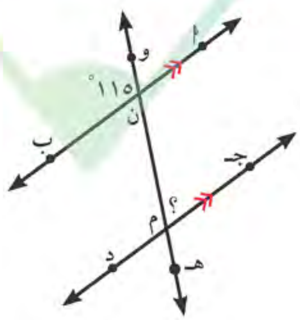
٧٠°
بالتحالف والتوازي



٦٠°
متبادلتان خارجياً مع التوازي

تذكر أنَّ :
- الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم واحد متكاملتان .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ قاطع لهما في ن ، م على الترتيب ، ق (و $\hat{\text{ن}}$ ب) = ١١٥° .

فأكمل لتوجد بالبرهان ق (جـ $\hat{\text{م}}$ ن) .

المعطيات : (١) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ قاطع لهما

(٢) ق (و $\hat{\text{ن}}$ ب) = ١١٥°

المطلوب : إيجاد ق (جـ $\hat{\text{م}}$ ن)

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ قاطع لهما (معطى)

∴ ق (و $\hat{\text{ن}}$ ب) = ١١٥° (معطى)

∴ ق (ن $\hat{\text{م}}$ د) = ق (و $\hat{\text{ن}}$ ب) = ١١٥° (بالتوازي والتناظر)

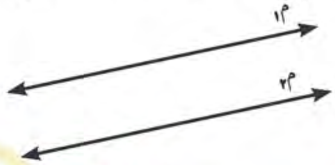
∴ ق (جـ $\hat{\text{م}}$ ن) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥° لأنَّ جـ $\hat{\text{م}}$ ن ، ن $\hat{\text{م}}$ د متجاورتان على مستقيم

فكِّر وناقش

قال عبد الكريم : أستطيع حل تدرب (٢) السابق بطرق أخرى مختلفة ، فهل توافقه الرأي ؟ فسّر إجابتك . نعم ، مثلاً ب نَ م = ٦٥° بالتجاور على مستقيم مع وَنَ ب ، ب نَ م = جـ مَ ن بالتبادل والتوازي

نشاط (٢) :

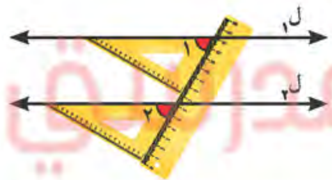
باستخدام المسطرة والمثلث القائم تحقق من صحة توازي المستقيمين $م_١$ ، $م_٢$ متبعًا الخطوات الأربع .



الخطوة الأولى :

الخطوة الثانية :

الخطوة الثالثة : حرك المثلث إلى الأسفل



الخطوة الرابعة : ماذا تلاحظ على $\hat{١}$ ، $\hat{٢}$

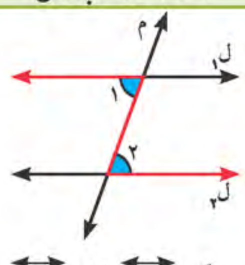
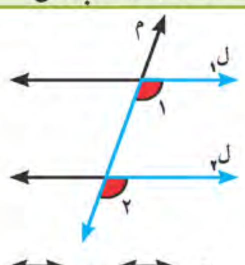
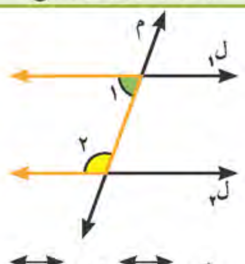
نتيجة : إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وتوفرت أحد الشروط التالية :

(١) زاويتان متبادلتان متطابقتان .

(٢) زاويتان متناظرتين متطابقتان .

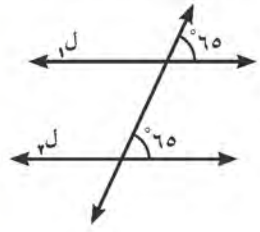
(٣) زاويتان متحالفتان متكاملتان.

فإن المستقيمين يكونان متوازيين .

إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وكان :		
الزاويتان المتبادلتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتناظرتان ١ ، ٢ متطابقتان	الزاويتان المتحالفتان ١ ، ٢ متكاملتان
 فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$	 فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$	 فإنَّ $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$

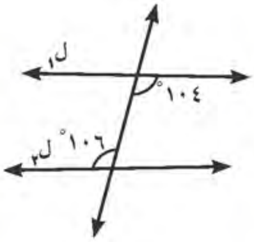
تدرّب (٣) :

في أي من الأشكال التالية يكون المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ متوازيين ؟ وضّح ذلك .



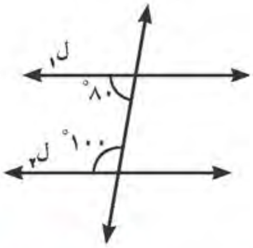
∵ الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$



∵ الزاويتان المتبادلتان غير متطابقتين

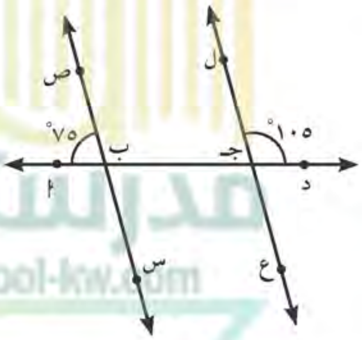
∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ غير متوازيين



∵ الزاويتان المتحالفتان متكاملتان

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$

مثال :



في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ قاطع للمستقيمين $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ في ب ، جـ على الترتيب ،

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ٧٥° ، ق (ل $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٠٥° ،

برهن أنَّ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$.

الحلّ :

المعطيات : (١) $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ قاطع للمستقيمين $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$.

(٢) ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ٧٥° ، ق (ل $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٠٥°

المطلوب : إثبات أنَّ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$

البرهان : ∵ ق (ل $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٠٥° (معطى)

∴ ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ ل) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥° (بالتجاور على مستقيم واحد)

∵ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ٧٥° (معطى)

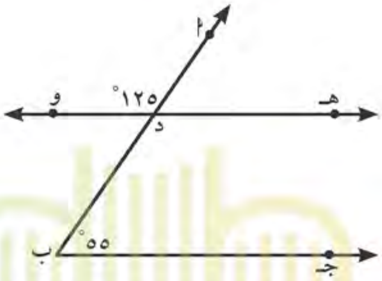
∵ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ ص) = ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ ل) = ٧٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$

فكِّر وناقش

قالت نور : أستطيع حل المثال السابق بطرق أخرى ، هل توافقها الرأي ، فسر إجابتك .

تدرَّب (٤) :



في الشكل المقابل : ق (أ د̂ و) = ١٢٥° ،

ق (د ب̂ جـ) = ٥٥° ، أثبت أنَّ $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

المعطيات : (١) ق (أ د̂ و) = ١٢٥°

(٢) ق (د ب̂ جـ) = ٥٥°

المطلوب : إثبات أنَّ $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

البرهان : ∵ ق (م د̂ و) = ١٢٥° (معطى)

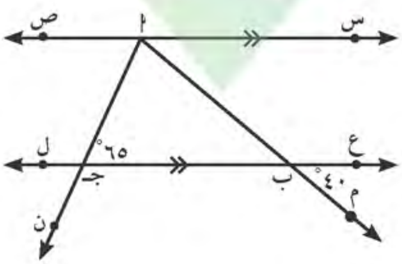
∴ ق (هـ د̂ ب) = ١٢٥° (زاويتان متقابلتان بالرأس) .

∵ ق (هـ د̂ ب) + ق (د ب̂ جـ) = ١٢٥° + ٥٥° = ١٨٠° (وهما متحالفتان)

∴ $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

هل يوجد لتدرب (٤) حلول أخرى لإثبات صحة التوازي ؟ وضح ذلك.

تمــرَّنْ :



١ في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ع ل}$ ،

ق (ع ب̂ م) = ٤٠° ، ق (أ جـ̂ ب) = ٦٥°

أوجد بالبرهان كلًّا من :

ق (ص أ̂ جـ) ، ق (س أ̂ ب) ، ق (جـ أ̂ ب)

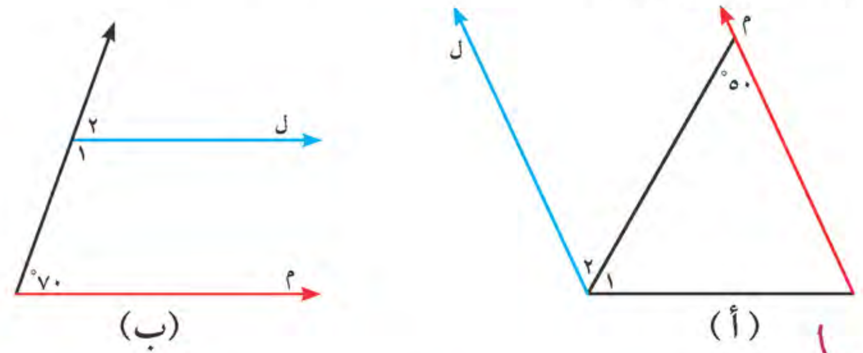
ق (ص أ̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) = ٦٥° بالتبادل والتوازي

ق (أ ب̂ جـ) = ق (ع ب̂ م) = ٤٠ زاويتان متقابلتان بالرأس

ق (س أ̂ ب) = ق (أ ب̂ جـ) = ٤٠ بالتبادل والتوازي

ق (جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٤٠°) = ٧٥° مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

٢ في الشكل (أ) ، (ب) ضع قياسًا من عندك لإحدى الزاويتين ١ ، ٢ أو كلتيهما لتجعل $\overleftarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{م}}$ متوازيين .



ق ($\hat{٢}$) = ٥٠°

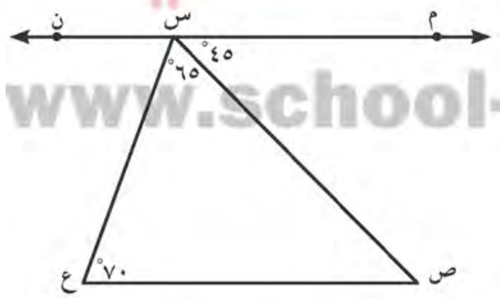
ق ($\hat{١}$) = اجابات متعددة

ق (١) = ١١٠° بالتحالف والتوازي

ق ($\hat{٢}$) = ٧٠° بالتناظر والتوازي

٣ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

أثبت أنَّ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$.



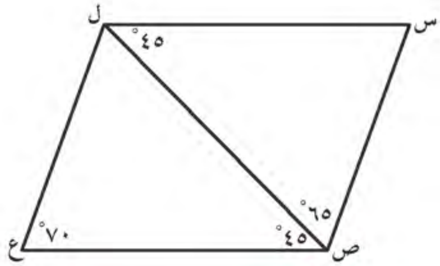
ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ١٨٠° − (٦٥° + ٧٠°) = ٤٥° مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ق (م $\hat{\text{س}}$ ص) = ٤٥° بالتبادل والتوازي

اذاً $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

④ في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه ،

برهن أن $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$.



ق(س لَ ع) = ق(ل صَ ع) = ٤٥° هما في وضع تبادل وتوازي

اذاً $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

△ ل ص ع فيه : ق(ص لَ ع) = ١٨٠° − ١١٠° = ٦٥° مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

ق(س صَ ل) = ق(ع لَ ص) = ٦٥° هما في وضع تبادل

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$

⑤ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،

أثبت أن $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$.

△ أ ب جـ متطابق الضلعين

ق(أ بَ جـ) = ق(أ جـَ ب) = (١٨٠° − ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠°

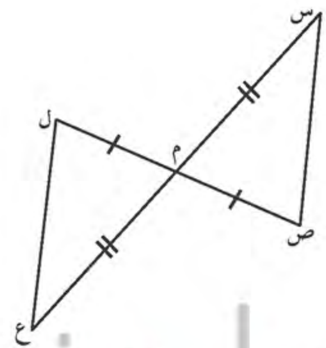
ق(أ بَ جـ) = ق(هـ جـَ د) = ٧٠° هما في وضع تناظر وتوازي

$\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$

٦ في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه ،
أثبت أنَّ :

(١) Δ س م ص $\cong$ Δ ع م ل

(٢) $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$



Δ س م ص ، Δ ع م ل فيهما

$\overline{\text{س م}} \cong \overline{\text{ع م}}$ معطى

$\overline{\text{ص م}} \cong \overline{\text{ل م}}$ معطى

ق (س $\hat{\text{م}}$ ص) = ق (ع $\hat{\text{م}}$ ل) بالتقابل بالرأس

Δ س م ص $\cong$ Δ ع م ل بحالة (ض ، ز ، ض)

من تطابق المثلثين نستنتج

ق ($\hat{\text{س}}$) = ق ($\hat{\text{ع}}$) وهما في وضع تبادل

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$

٨-٢ متوازي الأضلاع وخواصه
Parallelogram and its Properties

العبارات والمفردات :

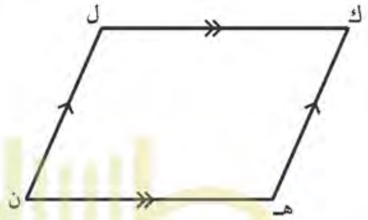
متوازي الأضلاع **Parallelogram**

زاويتان متقابلتان **Opposite Angles**

زاويتان متتاليتان **Consecutive Angles**

سوف تتعلّم : خواص متوازي الأضلاع .

تعلمت سابقًا : أنَّ متوازي الأضلاع هو شكل رُباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .

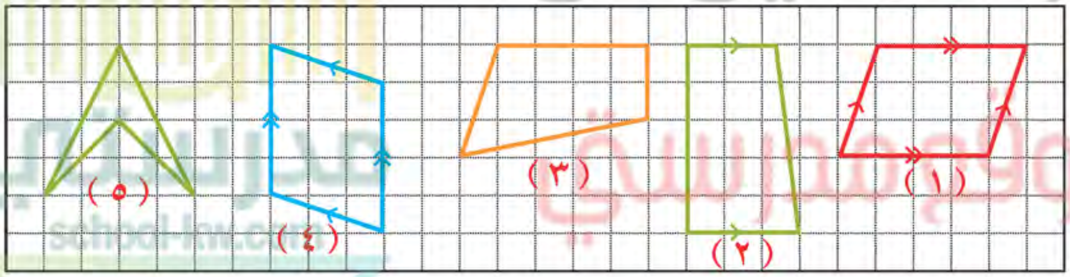


ك ل ن هـ متوازي أضلاع وعلى ذلك :

$\overline{ك ل}$ // $\overline{هـ ن}$ ، $\overline{هـ ك}$ // $\overline{ن ل}$

نشاط :

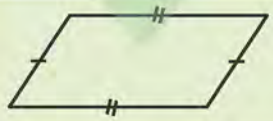
لاحظ العلامات المستخدمة في الأشكال التالية (علامات التوازي) . أيّهما يمثل متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟



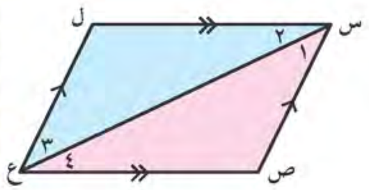
كل ضلعين متقابلين متوازيان

معلومات مفيدة :
معظم الأشكال التي تراها في الجسور الحديدية هي على شكل متوازي الأضلاع .

الخاصية الأولى :
في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان .



سوف نثبت الخاصية كما يلي :



المعطيات : (١) س ص ع ل متوازي أضلاع

المطلوب : إثبات أنَّ : (١) $\overline{س ص}$ ≅ $\overline{ل ع}$ ،

(٢) $\overline{س ل}$ ≅ $\overline{ص ع}$

البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

وليكن Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

(١) ق ($\hat{1}$) = ق ($\hat{3}$) (بالتبادل والتوازي)

(٢) ق ($\hat{4}$) = ق ($\hat{2}$) (بالتبادل والتوازي)

(٣) $\overline{\text{س ع}}$ (قطر متوازي الأضلاع (ضلع مشترك))

∴ Δ س ص ع ≅ Δ ع ل س

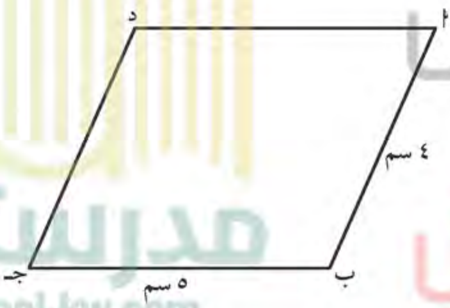
حالة التطابق هي (ز . ض . ز)

ينتج من التطابق أنَّ : $\overline{\text{س ص}}$ ≅ $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{س ل}}$ ≅ $\overline{\text{ص ع}}$

∴ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان .

تذكَّرْ أنَّ :
محيط الشكل (المضلع) الهندسي هو مجموع أطوال أضلاعه.

تدرّب (١) :



في الشكل المقابل متوازي أضلاع .

أوجد محيط متوازي الأضلاع :

لإيجاد المحيط نوجد باقي أطوال أضلاع متوازي الأضلاع :

د جـ = ٤ سم السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

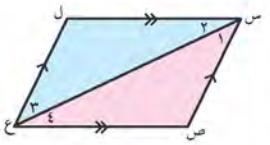
أ د = ٥ سم السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

محيط متوازي الأضلاع = ١٨ سم

الخاصية الثانية :

في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

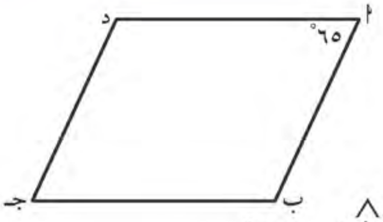
وسوف نثبت الخاصية الثانية كما في برهان الخاصية الأولى :



ينتج من التطابق أنَّ : $\hat{\text{ص}}$ ≅ $\hat{\text{ل}}$

∵ ق ($\hat{1}$) + ق ($\hat{2}$) = ق ($\hat{3}$) + ق ($\hat{4}$) ومنه نجد أنَّ $\hat{\text{س}}$ ≅ $\hat{\text{ع}}$

∴ كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان .



تدرّب (٢) :

أ ب جـ د متوازي أضلاع . ق ($\hat{أ}$) = ٦٥°

أوجد ق ($\hat{ب}$) ، ق ($\hat{جـ}$) ، ق ($\hat{د}$)

المعطيات : (١) أ ب جـ د متوازي أضلاع ، (٢) ق ($\hat{أ}$) = ٦٥°

المطلوب : إيجاد قياس ($\hat{ب}$) ، ($\hat{جـ}$) ، ($\hat{د}$)

البرهان : ∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

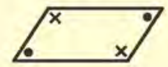
∴ ق ($\hat{ب}$) = ١٨٠° − (٦٥°) = ١١٥° (لأنَّ كل زاويتين متتاليتين متكاملتان)

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ق($\hat{أ}$) = ٦٥° (لأنَّ كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)

ق ($\hat{د}$) = ق($\hat{ب}$) = ١١٥° (لأنَّ كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)

تذكَّرْ أنَّ :

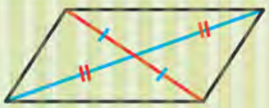
- في متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .

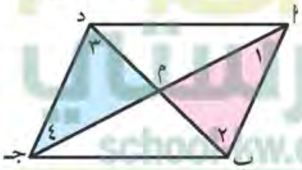


- مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمتوازي الأضلاع تساوي ٣٦٠°

الخاصية الثالثة :

في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر .





سوف نثبت الخاصية كما يلي :

المعطيات : (١) أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م .

المطلوب : إثبات أنَّ : (١) م منتصف $\overline{أجـ}$ ، (٢) م منتصف $\overline{ب د}$.

البرهان : لإثبات ذلك نبحث عن مثلثين متطابقين .

وليكن △ أ م ب ، △ جـ م د فيهما :

(١) ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٤}$) (بالتبادل والتوازي)

(٢) ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) (بالتبادل والتوازي)

(٣) أ ب = د جـ (من خواص متوازي الأضلاع)

⟸ ∴ △ أ م ب ≅ △ جـ م د

حالة التطابق هي (ز . ض . ز)

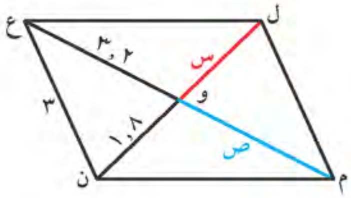
وينتج أنَّ : م أ = م جـ (أي أن : م منتصف $\overline{أجـ}$) ،

م ب = م د (أي أن : م منتصف $\overline{ب د}$)

نستنتج أنَّ : القطرين $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب د}$ ينصف كلّ منهما الآخر .

∴ في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

تدرّب (٣) :



ل م ن ع متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و .

أوجد : (١) س ، ص . (٢) محيط المثلث ل م و

∵ الشكل ل م ن ع متوازي اضلاع (معطى)

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ س = و ن = ١,٨ وحدة طول ،

وبالمثل ص = و ع = ٣,٢ وحدة طول

∴ محيط Δ ل م و = ١,٨ + ١,٨ + ٣,٢ + ٣,٢ = ٨ وحدة طول

تدرّب (٤) :

في متوازي الأضلاع المقابل ،

أوجد قيمة كلٍّ من س ، ص .

من خواص متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان

فيكون : $\boxed{\text{٣ س − ٥ = ١٠}}$

٣ س = ١٠ + ٥

٣ س = ١٥

س = ٥

بالمثل : $\boxed{\text{٢ ص + ٥ = ٧}}$

٢ص = ٧ - ٥

٢ص = ٢

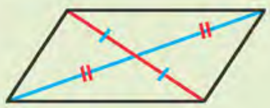
ص = ١

مما سبق : تحققنا من صحة خواص متوازي الأضلاع وهي :

(١) في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان

(٢) في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

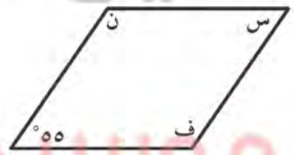
(٣) في متوازي الأضلاع القطران ينصف كلّ منهما الآخر



تمـــرَّنْ :

١ أوجد قيمة كلٍّ من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية :

أ

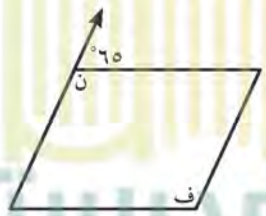


س = ٥٥°

ف = ن = ١٨٠ − ٥٥°

= ١٢٥°

ب



ن = ف = ١٨٠° − ٦٥

= ١١٥°

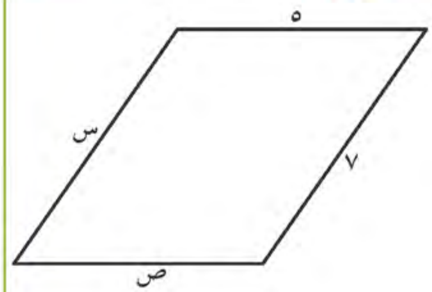
TIMSS 2019

٢ إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع وكان الفرق بين أي زاويتين غير متقابلتين ٤٠° ، فما هو قياس الزاوية الصغرى لمتوازي الأضلاع؟

٧٠°

٣ أوجد الأطوال المجهولة في متوازيات الأضلاع التالية :

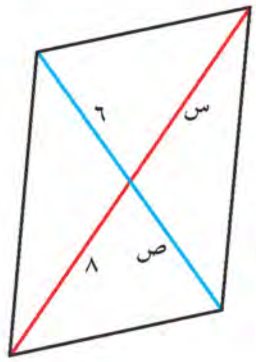
أ



س = ٧

ص = ٥

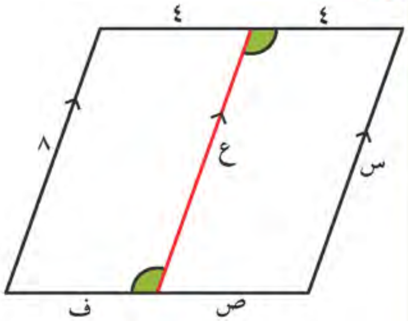
ب



س = ٨

ص = ٦

جـ



س = ٨

ص = ٤

ع = ٨

ف = ٤

٤ أب جـ د متوازي أضلاع فيه أب = ٥ وحدة طول ،

ب جـ = ٧ وحدة طول ، ق ($\hat{جـ}$) = ٥٥° ،

أوجد ما يلي مع ذكر السبب :

أ د = ب جـ = ٧ السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

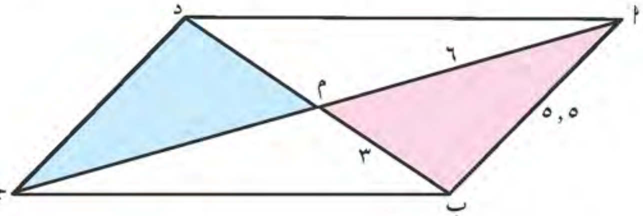
د جـ = أ ب = ٥ السبب : كل ضلعين متقابلين متطابقين

ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{جـ}$) = ٥٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

ق ($\hat{ب}$) = ١٨٠° − ٥٥° = ١٢٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متكاملتان

ق ($\hat{د}$) = ق ($\hat{ب}$) = ١٢٥° السبب : كل زاويتين متقابلتان متطابقتان

٥ أب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ، أب = ٥,٥ وحدة طول ، أم = ٦ وحدة طول ، ب م = ٣ وحدة طول . احسب محيط Δ د م جـ .



د م = م ب = ٣ وحدة طول السبب : القطران ينصف كل منهما الأخر

م جـ = م أ = ٦ وحدة طول السبب : القطران ينصف كل منهما الأخر

د جـ = أب = ٥,٥ وحدة طول السبب : ضلعان متقابلان متطابقان

∴ محيط Δ د م جـ = ١٤,٥ وحدة طول

٦ أب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ،
أثبت أن : أد = هـ و

أد = ب جـ ضلعان متقابلان متطابقان في متوازي الاضلاع أ ب جـ د

هـ و = ب جـ ضلعان متقابلان متطابقان في متوازي الاضلاع هـ ب جـ و

اذاً أد = هـ و من خواص المساواة

٧ أمامك متوازيات أضلاع ، أوجد قيمة س في كل مما يلي :

أ

٢ س + ٣٠° = ١٨٠° - ١٢٠°

٢ س = ٦٠° - ٣٠°

$\frac{\text{٢ س}}{٢} = \frac{٣٠°}{٢}$

س = ١٥°

ب

٣ س - ١ = ٨

٣ س = ٨ + ١

$\frac{\text{٣ س}}{٣} = \frac{٩}{٣}$

س = ٣

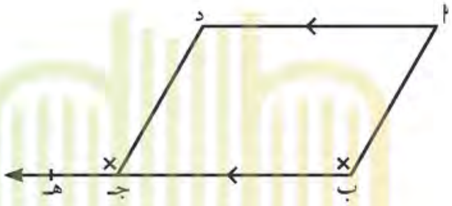
٨-٣ حالات الكشف عن متوازي الأضلاع
Conditions For a Quadrilateral To be a Parallelogram

سوف تتعلّم : متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع ؟

معلومات مفيدة :
يستخدم صانعو الدراجات الهوائية فكرة متوازي الأضلاع في تصميم الهيكل المعدني لها .

نشاط (١) :

تعلمت سابقًا أنَّ الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان يسمى متوازي أضلاع . وظف ما سبق لحل النشاط التالي :



١ ∵ $\overline{أد}$ // $\overline{بجـ}$ (١) (معطى)

∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\widehat{دجـهـ}$) (معطى)

وهما في وضع تناظر

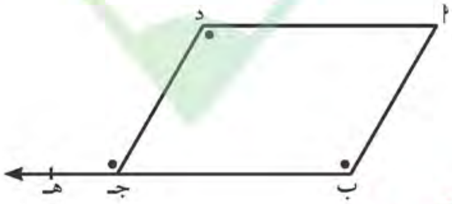
∴ $\overline{أب}$ // $\overline{دجـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

لأنَّ فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

> يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان .

اللوازم :
أعواد كويزنير



٢ ∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\widehat{دجـهـ}$)

وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{دجـ}$ (١)

∵ ق ($\hat{د}$) = ق ($\widehat{دجـهـ}$) وهما في وضع تبادل

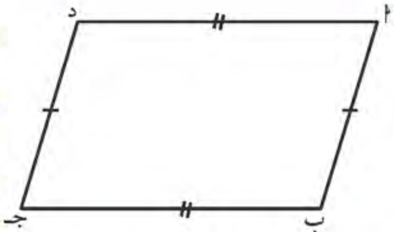
∴ $\overline{أد}$ // $\overline{بجـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي اضلاع

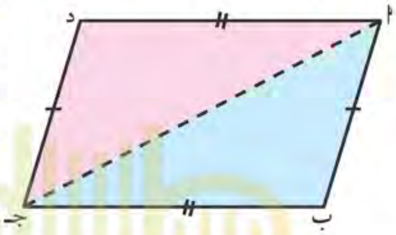
لأنَّ فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

وسوف ندرس الأربع حالات للكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



سنتحقق معًا بأنَّ الشكل الرباعي الذي فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان كحد أدنى من المعطيات تكفي لنقول إنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



المعطيات : (١) أ ب جـ د شكل رباعي

(٢) $\overline{أب} \cong \overline{دجـ}$ ، $\overline{أد} \cong \overline{بجـ}$

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د متوازي أضلاع

العمل : نرسم $\overline{أجـ}$ قطرًا في الشكل

البرهان : (نبحث عن زوايا (متبادلة - متناظرة - متخالفة) تؤدي إلى التوازي من خلال تطابق مثلثين) .

Δ أ ب جـ ، Δ أ د جـ فيهما :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{دجـ}$ (معطى)

(٢) $\overline{جـب} \cong \overline{دأ}$ (معطى)

(٣) $\overline{أجـ}$ ضلع مشترك (عملاً)

$\Leftarrow$ $\therefore$ Δ أ ب جـ $\cong$ Δ جـ د أ

(ض . ض . ض)

وينتج من التطابق أنَّ : $\hat{أ}$ ب جـ $\cong$ د $\hat{جـ}$ أ (وهما في وضع تبادل) ، $\therefore$ $\overline{أب} \parallel \overline{جـد}$ ،

أ $\hat{جـ}$ ب $\cong$ د $\hat{أ}$ جـ (وهما في وضع تبادل) ، $\therefore$ $\overline{بجـ} \parallel \overline{دأ}$

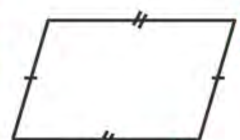
مما سبق ينتج أنَّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

الحالة الأولى : إذا كان في الشكل الرباعي كل ضلعين متقابلين متطابقين فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (١) :

أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟

أ



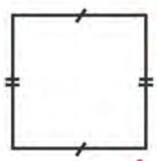
نعم

كل ضلعين متقابلين متطابقين

ب

لا

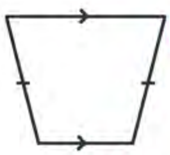
جـ



نعم

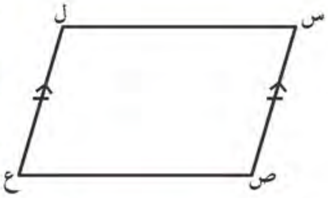
كل ضلعين متقابلين متطابقين

د

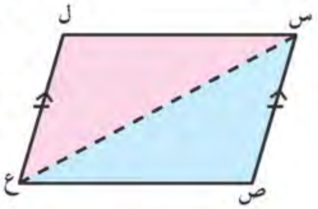


لا

الحالة الثانية : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟



المعطيات : (١) س ص ع ل شكل رباعي

(٢) $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ ، $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ل ع}}$

المطلوب : إثبات أنَّ س ص ع ل متوازي أضلاع

العمل : نرسم $\overline{\text{س ع}}$ قطرًا في الشكل

البرهان : **(نبحث عن مثلثين يضم أحدهما $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ والآخر يضم $\overline{\text{ل ع}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ ونثبت تطابقهما) .**

Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

(١) $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ **(فرضًا)**

(٢) ص $\hat{\text{س}}$ ع $\cong$ ل $\hat{\text{ع}}$ س **(بالتبادل والتوازي)**

(٣) $\overline{\text{س ع}}$ ضلع مشترك **(عملًا)**

$\Leftarrow$ ∴ Δ س ص ع $\cong$ Δ ع ل س

(ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنَّ : س $\hat{\text{ع}}$ ص $\cong$ ع $\hat{\text{س}}$ ل (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{ل س}} \parallel \overline{\text{ص ع}}$ (١) ، ∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ع ل}}$ (معطى) (٢)

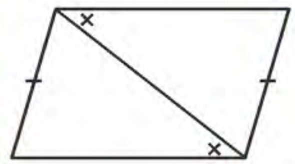
∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ س ص ع ل متوازي أضلاع .

وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

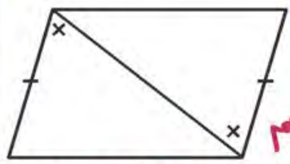
الحالة الثانية : إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (٢) :

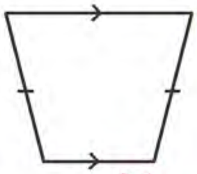
أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟

١ 

لا

٢ 

نعم ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

٣ 

لا

الحالة الثالثة : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع ؟

المعطيات : (١) ل م ن ك شكل رباعي

(٢) ق (ل̂) = ق (ن̂) ، ق (م̂) = ق (ك̂)

المطلوب : إثبات أنَّ ل م ن ك متوازي أضلاع

البرهان : ∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي يساوي ٣٦٠°

∴ ق (ل̂) + ق (ن̂) + ق (م̂) + ق (ك̂) = ٣٦٠°

ولكن ق (ل̂) = ق (ن̂) ، ق (م̂) = ق (ك̂) (فرضًا)

∴ ٢ ق (ل̂) + ٢ ق (م̂) = ٣٦٠° (بالقسمة على ٢)

∴ ق (ل̂) + ق (م̂) = ١٨٠° (ل̂ ، م̂ متكاملتان)

∵ ل̂ ، م̂ متحالفتان وفي جهة واحدة من القاطع ل م .

∴ ل ك // ن م (١)

وبالطريقة نفسها يمكننا إثبات أنَّ ل م // ك ن (٢) (بتطبيق الخطوات السابقة على م̂ ، ن̂)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ ل م ن ك متوازي أضلاع .

وعلى ذلك نقول : نعم المعطيات في الشكل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي ل م ن ك متوازي أضلاع .

الحالة الثالثة : إذا كان في الشكل الرباعي كل زاويتين متقابلتين متطابقتين فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

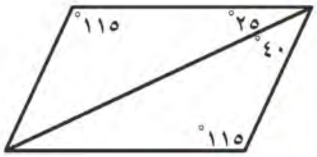
لاحظ أنَّ : الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع إذا كانت كل زاويتين متتاليتين (متحالفتين) فيه متكاملتين .

تدرّب (٣) :

أي من الأشكال الرباعية التالية وحسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع :

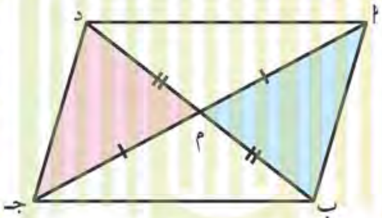
لا

نعم



نعم

الحالة الرابعة : لإثبات أنَّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



هل المعطيات في الشكل المقابل تكفي لأن يكون الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع ؟

المعطيات : (١) أ ب جـ د شكل رباعي

(٢) أ م = جـ م ، ب م = د م

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان : (نبحث عن مثلثين يضم أحدهما $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ والآخر يضم $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م د}}$ ونثبت تطابقهما).

$\triangle$ أ ب م ، $\triangle$ جـ د م فيهما :

(١) أ م = جـ م (فرضًا)

(٢) ب م = د م (فرضًا)

(٣) ق (أ $\hat{\text{م}}$ ب) = ق (جـ $\hat{\text{م}}$ د) **بالتقابل بالرأس**

$\Leftarrow$ ∴ $\triangle$ أ م ب $\cong$ $\triangle$ جـ م د

(ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنَّ :

ق (ب $\hat{\text{أ}}$ م) = ق (د $\hat{\text{جـ}}$ م) **(وهما في وضع تبادل)** ، ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$ (١)

وبنفس الطريقة يمكن من تطابق المثلثين أ م د ، جـ م ب نثبت أنَّ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$ (٢)

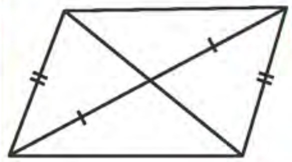
∴ من (١) ، (٢) **ينتج أنَّ ، أ ب جـ د متوازي أضلاع .**

الحالة الرابعة : إذا كان في الشكل الرباعي **القطران ينصف كلّ منهما الآخر** فإنَّ الشكل يكون متوازي أضلاع .

تدرّب (٤) :

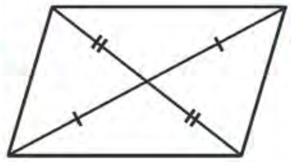
أي من الأشكال الرباعية التالية حسب البيانات المدونة عليها يمكن أن تكون متوازي أضلاع ؟

أ



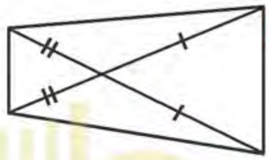
كلا

ب



نعم

جـ



كلا

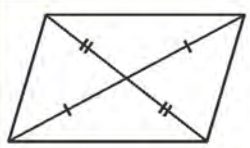
مما سبق نجد أنَّه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفرت أحد الشروط التالية :

١ كل ضلعين متقابلين متوازيين (من التعريف) .

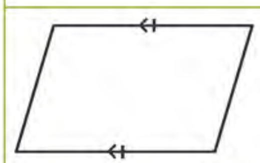
٢ كل ضلعين متقابلين متطابقين .

٣ كل زاويتين متقابلتين متطابقتين .

٤ القطران ينصف كل منها الآخر .

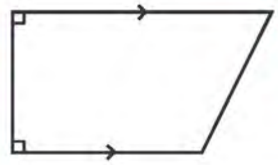


٥ ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .

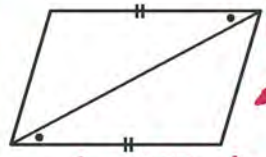


تدرّب (٥) :

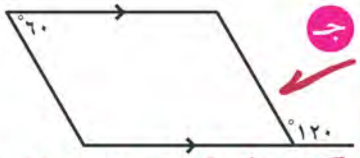
ضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع وفق المعطيات المبينة عليه مع ذكر السبب :



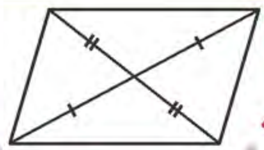
أ ....



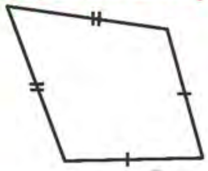
ب ✓ ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان



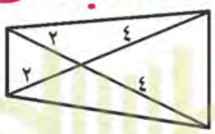
جـ ✓ كل زاويتين متقابلتين متطابقتان



د ✓ القطران ينصف كل منهما الآخر



هـ ....



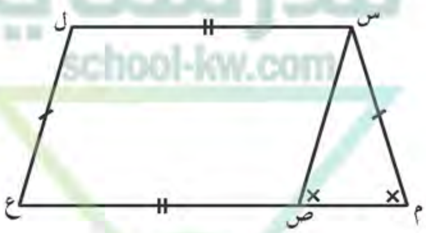
و ....

تذكَّرْ أنَّ :
إذا كان المثلث متطابق الضلعين ، فإن زاويتي القاعدة فيه متطابقتان ، والعكس صحيح .

مثال (١) : إذا كان س ل = ص ع ، س م = ل ع ، $\hat{م} \cong$ س $\hat{ص}$ م ،

برهن أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

الحلّ :



المعطيات : (١) س ل = ص ع

(٢) س م = ل ع

(٣) $\hat{م} \cong$ س $\hat{ص}$ م

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

البرهان : في Δ س م ص ، $\hat{م} \cong$ س $\hat{ص}$ م (فرضًا)

$\therefore$ Δ س م ص متطابق الضلعين فيه س م = س ص

$\because$ س م = ل ع (فرضًا) ،

$\therefore$ س ص = ل ع من خواص المساواة (١)

$\because$ س ل = ص ع (فرضًا) (٢)

$\therefore$ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

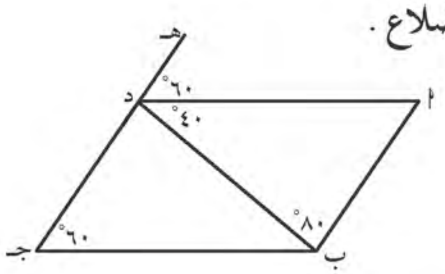
س ص ع ل متوازي أضلاع لأنَّه شكل رباعي فيه (كل ضلعين متقابلين متطابقان)

تذكَّرْ أنَّ :
خواص المساواة :
إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد نسبية
وكان أ = ب فإن :
أ + جـ = ب + جـ
أ - جـ = ب - جـ
أ × جـ = ب × جـ
أ ÷ جـ = ب ÷ جـ
جـ ≠ ٠

ملاحظة :
إذا كان أ = ب ، ب = جـ
فإن أ = جـ

تدرّب (٦) :

برهن على أنَّ الشكل الرباعي ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع .



المعطيات : ﻫ ب جـ د شكل رباعي ،

(١) ق (ﻫ د̂ هـ) = ق (جـ̂) = ٦٠°

(٢) ق (ﻫ ب̂ د) = ٨٠°

(٣) ق (ﻫ د̂ ب) = ٤٠°

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان : ق (ﻫ د̂ هـ) = ق (جـ̂) = ٦٠° (وهما في وضع تناظر)

∴ ﻫ د // ب جـ (١)

في Δ ﻫ ب د ، ق (ﻫ̂) = ١٨٠° − (٨٠° + ٤٠°)

= ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠° لأنَّ

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

∵ ق (ﻫ د̂ هـ) = ق (ﻫ̂) = ٦٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ ﻫ ب // د جـ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن :

ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع لأنَّه (شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان)

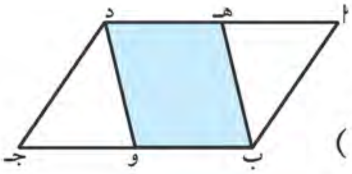
• فكر في طرق أخرى للحل .

....

....

مثال (٢) : إذا كان ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع فيه هـ منتصف ﻫ د ، و منتصف ب جـ

برهن أنَّ الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع .



المعطيات : ﻫ ب جـ د متوازي أضلاع ،

(١) ﻫ هـ = هـ د (هـ منتصف ﻫ د)

(٢) ب و = و جـ (و منتصف ب جـ)

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي هـ ب و د متوازي أضلاع .

الحلّ :

البرهان : ∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (فرضًا)

∴ أ د = ب جـ (من خواص متوازي الأضلاع)

∴ $\frac{1}{2}$ أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ (من خواص المساواة)

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ د}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (فرضًا)

∴ هـ د = ب و (١)

∵ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (من خواص متوازي الأضلاع)

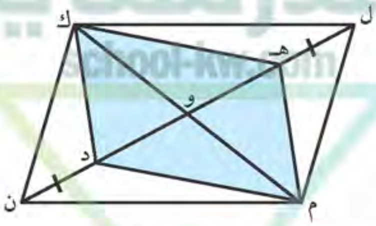
∵ هـ ∈ $\overline{\text{أ د}}$ ، و ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ د}}$ // $\overline{\text{ب و}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

(شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)

تدرب (٧) :



إذا كان ل م ن ك متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و ، ل هـ = ن د ،

برهن أنَّ الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي أضلاع .

المعطيات : ل م ن ك متوازي أضلاع ، ل هـ = د ن

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي أضلاع .

البرهان : ∵ ل م ن ك متوازي أضلاع (فرضًا)

∴ م و = و ك (من خواص متوازي الأضلاع) (١)

∴ ل و = و ن (من خواص متوازي الأضلاع)

∵ ل هـ = ن د (معطى)

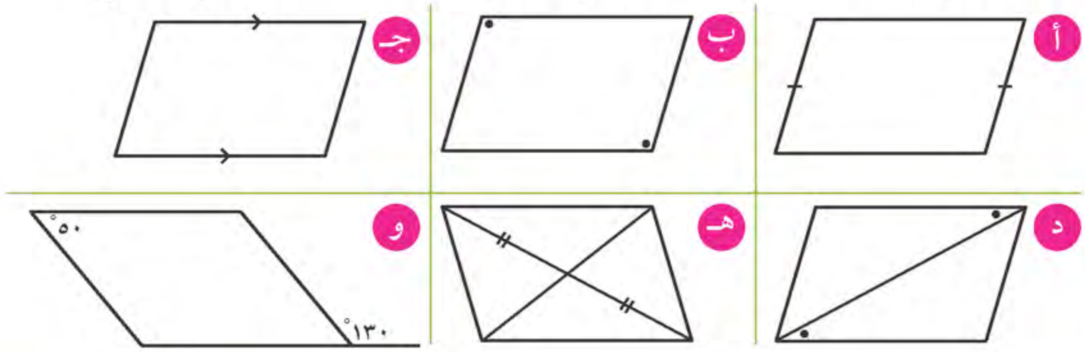
∴ ل و − ل هـ = و ن − د ن (من خواص المساواة)

∴ هـ و = و د (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أنَّ هـ م د ك متوازي أضلاع (القطران ينصف كل منهما الآخر)

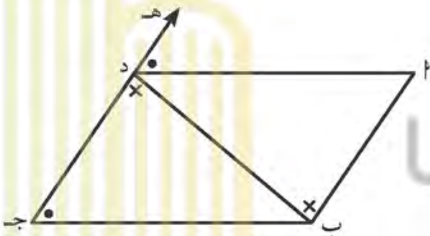
تمـــرَّنْ :

١ أضف معطى واحدًا فقط من عندك يجعل كلًّا من الأشكال التالية متوازي أضلاع :



٢ من البيانات على الشكل المقابل :

أثبت أنَّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



ق(أ هـ^ د) = ق(جـ^) هما في وضع تناظر وتوازي

أد // ب جـ ← ①

ق(جـ د^ ب) = ق(أ ب^ د) هما في وضع تبادل وتوازي

ب أ // جـ د ← ②

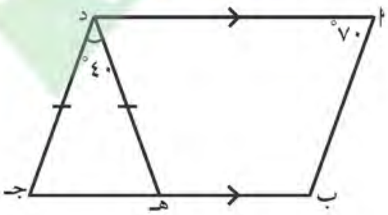
من ① و ② الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلان متوازيان

٣ في الشكل المقابل : أد // ب جـ

د هـ = د جـ ، ق (أ^) = ٧٠° ،

ق (هـ د^ جـ) = ٤٠° ، برهن أنَّ

الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .



أد // ب جـ معطى

ق(أ^) = ٧٠° معطى

ق(ب^) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° زاويتان متحالفتان متكاملتان

△ د هـ جـ متطابق الضلعين

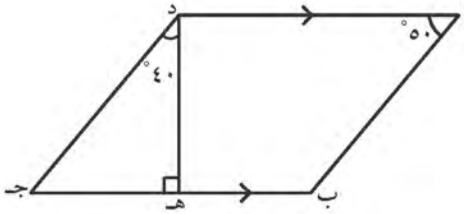
ق(هـ د^ جـ) = ٤٠° معطى

ق(د هـ^ جـ) = ق(جـ^) = (١٨٠° − ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠°

أب // د جـ

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين

٤ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{أد} \parallel \overline{ب جـ}$ ،



$\overline{د هـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، $ق(\hat{أ}) = ٥٠°$

$ق(هـ \hat{د} جـ) = ٤٠°$ ، فبرهن أنَّ

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

$\overline{أد} \parallel \overline{ب جـ}$ معطى

$ق(\hat{أ}) = ٥٠°$ معطى

$ق(\hat{ب}) = ١٨٠° - ٥٠° = ١٣٠°$ زاويتين متتاليتين متكاملتان

△ د هـ جـ القائم الزاوية في هـ فيه :

$\overline{دهـ} \perp \overline{ب جـ}$ معطى

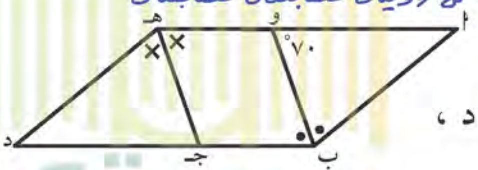
$ق(هـ \hat{د} جـ) = ٤٠°$ معطى

$ق(\hat{جـ}) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°$ مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

$ق(أ \hat{د} جـ) = ٣٦٠° - (٥٠° + ١٣٠° + ٥٠°) = ١٣٠°$ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن فيه كل زاويتان متقابلتان متطابقتان

٥ إذا كان أ ب د هـ متوازي أضلاع ،



$\overrightarrow{ب و}$ منصف $أ \hat{ب} د$ ، $\overrightarrow{هـ جـ}$ منصف $أ \hat{هـ} د$ ،

$ق(أ \hat{و} ب) = ٧٠°$ ، فبرهن أنَّ

الشكل الرباعي و ب جـ هـ متوازي أضلاع .

الشكل أ ب د هـ متوازي أضلاع معطى

$ق(أ \hat{ب} د) = ق(أ \hat{هـ} د)$

$\overrightarrow{ب و}$ منصف $أ \hat{ب} د$ ، أيضاً $\overrightarrow{هـ جـ}$ منصف $أ \hat{هـ} د$ معطى

$ق(و \hat{ب} جـ) = ق(و \hat{ب} جـ) = ٧٠°$ بالتبادل والتوازي

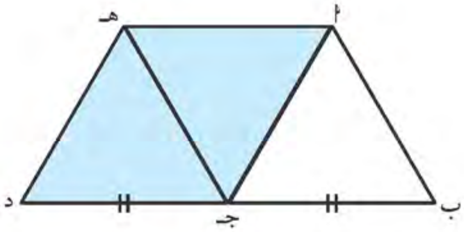
الشكل و ب جـ فيه :

$ق(ب \hat{و} هـ) = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°$ بالتجاور على مستقيم

ومنه : $ق(ب \hat{جـ} هـ) = ٣٦٠° - (٧٠° + ٧٠° + ١١٠°) = ١١٠°$ مجموع قياسات الشكل الرباعي ٣٦٠°

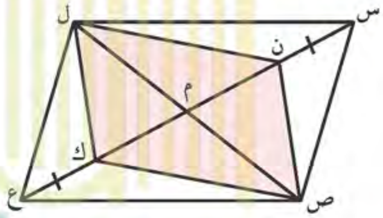
الشكل و ب جـ هـ متوازي اضلاع لأن كل زاويتان متقابلتان متطابقتان

٦ إذا كان أ ب جـ هـ متوازي أضلاع ،
ب جـ = جـ د ، فبرهن أنَّ الشكل
الرباعي أ جـ د هـ متوازي أضلاع .



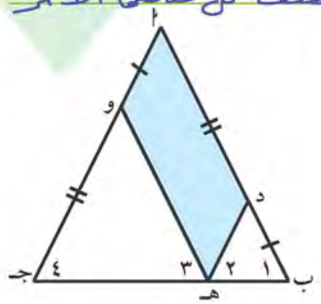
الشكل أ ب جـ هـ متوازي أضلاع
$\overline{ب جـ} = \overline{أ هـ}$ من خواص متوازي الأضلاع
$\overline{ب جـ} = \overline{جـ د}$ معطى
$\overline{ب جـ} = \overline{جـ د} = \overline{أ هـ}$ من خواص المساواة
$\overline{ب جـ} \parallel \overline{أ هـ}$ من خواص متوازي الأضلاع
ب ، جـ ، د على استقامة واحدة
$\overline{جـ د} \parallel \overline{أ هـ}$
إذاً الشكل أ جـ د هـ متوازي أضلاع لأن كل ضلعان متقابلان متوازيان

٧ إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع
تقاطع قطريه في م ، س ن = ك ع ، فأثبت
أنَّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



الشكل ن ص ك ل متوازي أضلاع
م نقطة تقاطع قطريه
م ص = م ل
م ن = م ك
س ن = ع ك
م ن + ن س = م ك + ك ع ⟸ م س = م ع
الشكل متوازي أضلاع لأن قطراه ينصف كل منهما الآخر

٨ في الشكل المقابل : $ق(\hat{١}) = ق(\hat{٢})$
$ق(\hat{٣}) = ق(\hat{٤})$ ، أد = و جـ ، أو = د ب
برهن أنَّ أ د هـ و متوازي أضلاع .



△ د ب هـ فيه
$ق(\hat{١}) = ق(\hat{٢})$ معطى
د ب = د هـ مثلث متطابق الضلعين
د ب = أ و
د هـ = أ و من خواص المساواة
المثلث و هـ جـ فيه : $ق(\hat{٣}) = ق(\hat{٤})$ معطى
و هـ = و جـ مثلث متطابق الضلعين
و جـ = أ د
و هـ = أ د
الشكل متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين

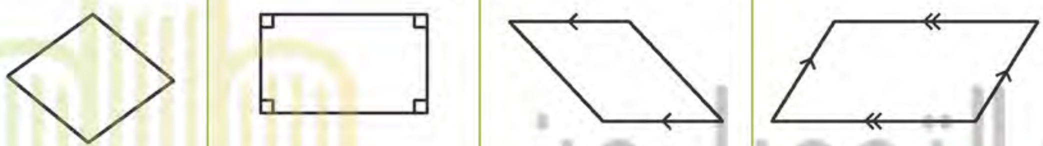
٨-٤ المستطيل (خواصه والكشف عنه)
Exploring Rectangle and his Properties

سوف تتعلّم : خواص المستطيل والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مستطيلًا .

نشاط (١) :

تأمل الأشكال الأربعة التالية :

(١) (٢) (٣) (٤)



أ اذكر أوجه الشبه والاختلاف بين الشكل (جـ) والأشكال الأخرى :

الشكل	(١)	(٢)	(٤)
أوجه الشبه	كل ضلعين متقابلين متوازيين	ضلعان متوازيان	
أوجه الاختلاف	زوايا ه قائمة	زوايا ه قائمة	زواياه قائمة

تذكَّرْ أنَّ :
- زوايا المستطيل قوائم .
- أقطاره متطابقة .

ب يسمى الشكل (٣) ....مستطيل

جـ .... هو شكل رباعي زواياه الأربع قوائم .

هل المستطيل متوازي أضلاع ؟ لمعرفة ذلك :

لاحظ أنَّ : س ص ع ل مستطيل

(شكل رباعي زواياه الأربع قوائم) فيه :

∵ ق ($\hat{\text{س}}$) = ق ($\hat{\text{ص}}$) = ٩٠° **(وهما زاويتان في وضع تحالف ومتكاملتان)**

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ،

كذلك ∵ ق ($\hat{\text{س}}$) = ق ($\hat{\text{ل}}$) = ٩٠° **(وهما زاويتان في وضع تحالف ومتكاملتان)**

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ ،

نستنتج مما سبق أنَّ : المستطيل يكون متوازي أضلاع .

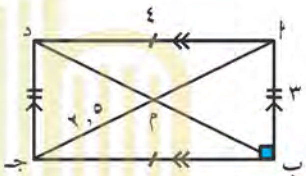
فكِّر وناقِش

هل يمكن إثبات أنَّ المستطيل متوازي أضلاع بطريقة أخرى ؟ وضّح ذلك .

الآن يمكن أن نعطي تعريفًا بسيطًا للمستطيل :

المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

تدرّب (١) :



أ ب جـ د مستطيل فيه : ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ،

أ ب = ٣ ، أ د = ٤ ، م جـ = ٢,٥

أكمل ما يلي :

١ د جـ = ٣ لأن الضلعين المتقابلين متطابقان

٢ أ جـ = ٥ لأن القطران ينصف كل منهما الآخر

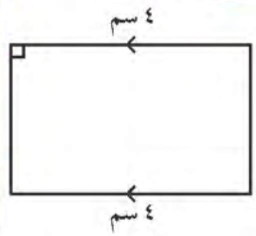
٣ ق ($\hat{د}$) = ٩٠° لأن الزوايا قائمة

٤ ق ($\hat{جـ}$) = ٩٠° لأن الزوايا قائمة

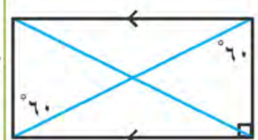
تدرّب (٢) :

استخدم المعطيات (موظفًا التعريف) التي على الأشكال لتبين أيًا منها تمثل مستطيلًا .

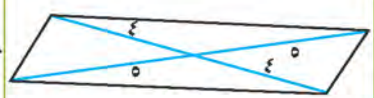
أ



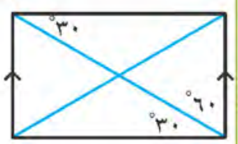
ب



جـ



د

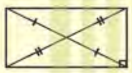


تذكَّرْ أنَّ :

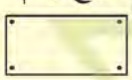
للمستطيل الخواص التالية :

١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .

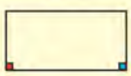
٢ - القطران ينصف كل منهما الآخر .



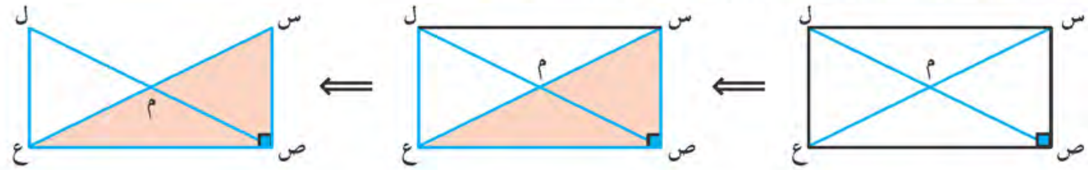
٣ - كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس وزواياه الأربع قوائم .



٤ - كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .



مثال (١) : سنبحث الآن ما إذا كان للمستطيل خواص أخرى خاصة به غير أنَّ زواياه قائمة ، وسوف نبيِّن أنَّ قطري المستطيل متطابقان .



المعطيات : (١) س ص ع ل مستطيل

(٢) س ع ، ص ل قطران في المستطيل

المطلوب : إثبات أن س ع = ص ل

البرهان : سنبحث عن مثلثين في المستطيل س ص ع ل يحتويان على قطريه ، وسوف نبيِّن أنَّ هذين المثلثين متطابقان.

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

(١) س ص = ل ع (من خواص المستطيل)

(٢) ص ع (ضلع مشترك)

(٣) ق (ص) = ق (ع) (من خواص المستطيل)

⟸ Δ س ص ع ≅ Δ ل ع ص (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق س ع ≅ ص ل

نستنتج مما سبق أنَّ : قطري المستطيل متطابقان

فكِّر وناقِش

المستطيل متناظر (متماثل) حول نقطة تقاطع قطريه . فسّر ذلك .

الكشف عن المستطيل

مما سبق نقول إنَّ متوازي الأضلاع يكون مستطيلًا إذا توفرت فيه أحد الشروط التالية :

(١) إحدى زواياه قائمة .

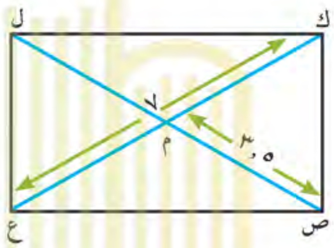
(٢) قطراه متطابقان .

تدرّب (٣) :

ك ص ع ل متوازي أضلاع فيه : ك ع = ٧ وحدة طول ،

ص م = ٣,٥ وحدة طول .

أثبت أنَّ : ك ص ع ل مستطيل



المعطيات : (١) ك ص ع ل متوازي أضلاع

(٢) ك ع = ٧ وحدة طول ، ص م = ٣,٥ وحدة طول

المطلوب : إثبات أنَّ ك ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ ك ص ع ل متوازي اضلاع (معطى)

∴ ص م = م ل = ٣,٥ ، القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ ص ل = ٧

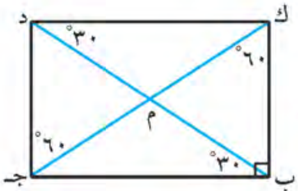
∴ ك ع = ص ل = ٧ ، القطران متطابقان

∴ الشكل ك ص ع ل مستطيل لأنَّ

ك ص ع ل شكل متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان

تذكَّرْ أنَّ :
إذا توازى مستقيمان وقطعهما مستقيم ثالث فإنَّ :
- الزوايا المتبادلة متساوية في القياس .

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل أثبت أنَّ : ك ب جـ د مستطيل .

∴ ق (ك $\hat{د}$ ب) = ق (د $\hat{ب}$ جـ) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{كد}$ // $\overline{بجـ}$ (١)

∴ ق (ب $\hat{ك}$ جـ) = ق (د $\hat{جـ}$ ك) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{كب}$ // $\overline{دجـ}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل متوازي أضلاع ولكن

ق (ك $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠°

∴ الشكل المستطيل لأنّه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

فكّر وناقش

يرى المتعلّم بدر أنَّ جميع متوازيات الأضلاع هي مستطيلات ، ولكن المتعلّم أمير يرى أنَّ متوازيات الأضلاع مستطيلات إذا توافرت فيها شروط معينة . ما رأيك ؟ فسّر إجابتك . رأي أمير صحيح

تمـــرَّنْ :

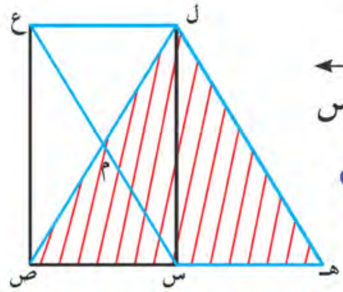
١ أ ب جـ د مستطيل فيه : ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٦٠°

احسب ق (د $\hat{ب}$ جـ) .

ق (د $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

بما أن ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ق (أ $\hat{ب}$ د) = ٦٠°

٢ س ص ع ل مستطيل ، هـ س ع ل متوازي أضلاع



أثبت أنَّ : Δ ل ص هـ متطابق الضلعين ، هـ $\in$ ص س

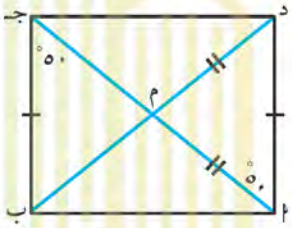
ل ص = ع س القطران متطابقان في المستطيل

ل هـ = ع س ضلعان متقابلان في متوازي الاضلاع

اذاً ل ص = ل هـ

Δ ل ص هـ متطابق الضلعين

٣ ﻫ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م



ﻫ د = ب جـ ، م د = م ﻫ ،

ق (د $\hat{ﻫ}$ جـ) = ق (ب $\hat{جـ}$ ﻫ) = ٥٠°

أثبت أنَّ : ﻫ ب جـ د مستطيل ، ثم أوجد ق (ب $\hat{ﻫ}$ جـ) .

ق (د $\hat{ﻫ}$ ب) = ق (ب $\hat{جـ}$ ﻫ) = ٥٠° زاويتان متبادلتان

اذاً ﻫ د // ب جـ كذلك $\overline{ﻫ د} \cong \overline{ب جـ}$

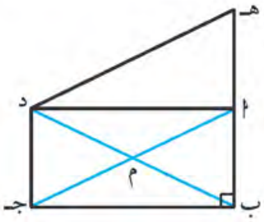
اذاً ﻫ ب جـ د متوازي اضلاع

ولكن م ﻫ = م د اذاً القطران متساويان

ﻫ ب جـ د مستطيل

ق (ب $\hat{ﻫ}$ جـ) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

٤ هـ ﻫ جـ د متوازي أضلاع ، ق (ﻫ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ،



$\overline{ﻫ د}$ // $\overline{ب جـ}$ ، هـ ، ﻫ ، ب على استقامة واحدة .

أثبت أنَّ : ﻫ ب جـ د مستطيل .

الشكل هـ ﻫ جـ د متوازي اضلاع

هـ ﻫ // د جـ اذاً هـ ، ﻫ ، ب على استقامة واحدة

ﻫ ب // د جـ ـــ ①

ﻫ د // ب جـ ـــ ②

من ① و ② الشكل ﻫ ب جـ د متوازي اضلاع

ق (ب) = ٩٠° ⇐ الشكل ﻫ ب جـ د مستطيل احدى زواياه قائمة

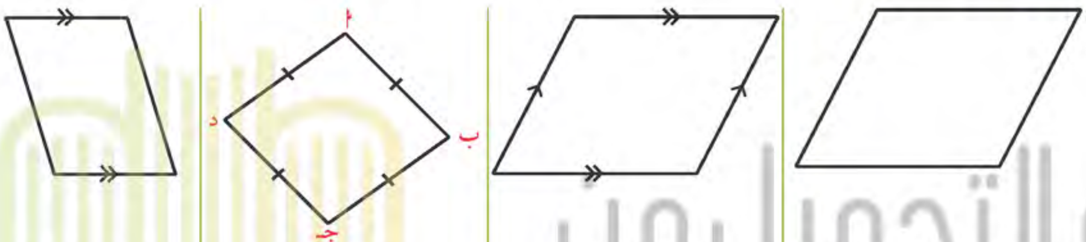
٨-٥ المعين (خواصه والكشف عنه)
Exploring Rhombus and his Properties

سوف تتعلّم : خواص المعين والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع معينًا .

نشاط :

تذكر أنَّ :
المعين هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .

١ في الأشكال الرباعية التالية ، بم يتميز الشكل (٣) عن الأشكال الأخرى :



شكل (١)   شكل (٢)   شكل (٣)   شكل (٤)

يتميز الشكل الرباعي (٣) بوجود أ ب = ب جـ = جـ د = أ د

٢ ماذا نسمي الشكل (٣) ؟ معين

هل المعين متوازي أضلاع؟ لمعرفة ذلك لاحظ أنَّ :

أ ب = د جـ (فرضًا) (١)

أ د = ب جـ (فرضًا) (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أنَّ كل ضلعين متقابلين متطابقان .

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

تذكر أنَّ :
خواص متوازي الأضلاع هي كالتالي :
١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .
٢ - كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
٣ - كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
٤ - القطران ينصف كل منهما الآخر .

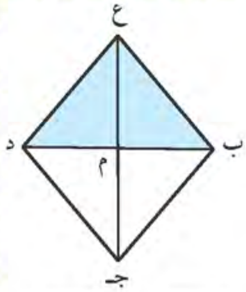
∴ المعين أ ب جـ د متوازي أضلاع وله جميع خواص متوازي الأضلاع .

سنبحث الآن ما إذا كان للمعين خواص أخرى وسوف نبيِّن أنَّ :

١ المعين قطراه متعامدان .

٢ كل قطر في المعين ينصف زاويتين متقابلتين فيه .

ع ب جـ د معين تقاطع قطريه في م



أثبت أنَّ القطرين متعامدان $\overline{\text{ع جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$.

المعطيات : ع ب جـ د معين ، م منتصف القطرين .

المطلوب : إثبات أنَّ القطرين متعامدان .

البرهان : لإثبات أنَّ القطرين متعامدان سوف نبحث عن مثلثين يحويان $\overline{\text{ع جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ (أو جزءًا منهما) .

نأخذ المثلثين : Δ ع م ب ، Δ ع م د فيهما :

(١) $\overline{\text{ع ب}} \cong \overline{\text{ع د}}$ (من خواص المعين)

(٢) $\overline{\text{ع م}}$ (ضلع مشترك)

(٣) $\overline{\text{ب م}} \cong \overline{\text{د م}}$ (من خواص المعين)

$\Longleftarrow$ $\therefore$ Δ ع م ب $\cong$ Δ ع م د بحالة (ض . ض . ض)

ومنه نجد أنَّ $ق(\widehat{\text{ع م ب}}) = ق(\widehat{\text{ع م د}}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (بالتجاور على مستقيم واحد)

$\therefore$ القطران متعامدان $\overline{\text{ع جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ $\Longleftarrow$ قطرا المعين متعامدان .

كذلك ينتج من التطابق : $\because$ $ق(\widehat{\text{ب ع م}}) = ق(\widehat{\text{د ع م}})$

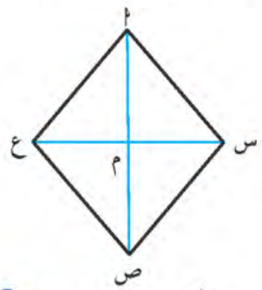
$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ع م}}$ منصف $(\widehat{\text{ب ع د}})$

بالمثل نقوم بمطابقة بقية المثلثات لنستنتج أنَّ :

كل قطر في المعين ينصف زاويتين متقابلتين فيه .

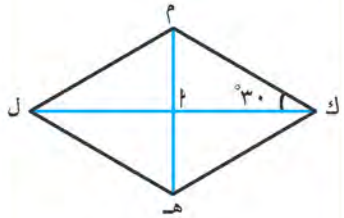
تدرّب (١) :

في الأشكال التالية معينات ، أوجد المطلوب مع ذكر السبب :



ق (س م^ أ) = ٩٠°

السبب : القطران متعامدان



ق (م ك^ هـ) = ٦٠°

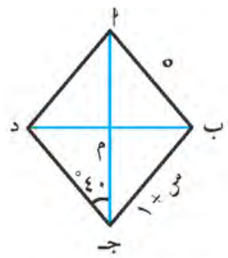
السبب : القطر ينصف الزاوية

ق (م ل^ هـ) = ٦٠°

السبب : زاويتان متقابلتان

ق (ل هـ^ ك) = ١٢٠°

السبب : قياس زاويتين متتاليتين ١٨٠°



طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٥

السبب : اضلاع المعين متطابقة

أوجد قيمة س :

س + ١ = ٥

س = ٤

محيط المعين = ٢٠

الكشف عند المعين

ما الشروط التي تجعل متوازي الأضلاع معينًا ؟

الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :

أولًا : $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$

أكمل ما يلي :

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع فإن :

$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ع ل}}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

$\overline{\text{س ل}} \cong \overline{\text{ص ع}}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

∵ $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

∴ س ص = س ل = ل ع = ع ص (من خواص المساواة)

∴ س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين.

نلاحظ أنَّ : يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا تطابق فيه ضلعان مجاوران .

معلومات مفيدة :

يستخدم البناؤون الأشكال الهندسية ، كالمربعات ، المستطيلات ، المثلثات ... إلخ في تنفيذ الفسيفساء .

ثانيًا : س ع ⊥ ص ل

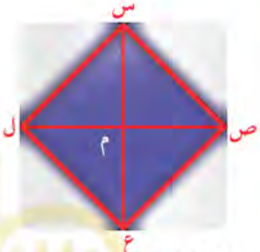
Δ س م ص ، Δ س م ل فيهما :

س م (ضلع مشترك)

ص م = ل م (قطرا متوازي الأضلاع متناصفان)

ق (س م̂ ص) = ق (س م̂ ل) = ٩٠° (فرضًا)

⟸ ∴ Δ س م ص ≅ Δ س م ل بحالة (ض . ز . ض)



∴ س ص ≅ س ل

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ص ع = ع ل = س ل

∴ س ص ع ل شكل رباعي فيه أضلاعه الأربعة متطابقة فهو معين .

نلاحظ أنّ : يكون متوازي الأضلاع معين إذا تعامد قطراه .

مما سبق نلاحظ أنَّه يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا توفر فيه أحد الشرطين التاليين :

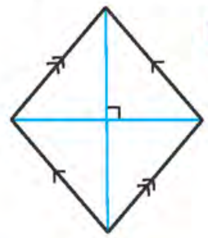
(١) إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .

(٢) إذا تعامد قطراه .

تدرّب (٢) :

أي الأشكال التالية يمثل معينًا مع ذكر السبب ؟

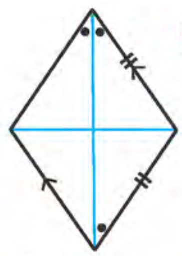
أ



نعم

متوازي اضلاع وتعامد قطراه

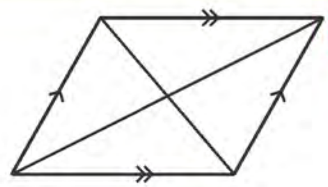
ب



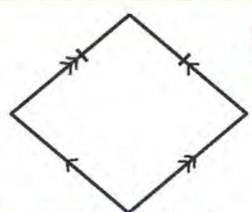
نعم

لان متوازي الاضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

جـ



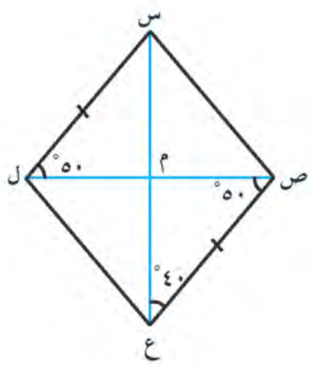
د



نعم

لان متوازي الاضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابل :

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٠° ،

ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٤٠° ، س ل = ص ع .

أثبت أنَّ الشكل الرباعي س ص ع ل معين .

المعطيات :

(١) س ل = ص ع

(٢) ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٠°

(٣) ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٤٠°

المطلوب : إثبات أنَّ الشكل س ص ع ل معين

البرهان :

∵ س ل = ص ع (فرضًا) (١)

∵ ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنَّ فيه ضلعين متقابلين متوازيين ، متطابقين (٣)

في Δ ص م ع فيه :

∵ ق (ع $\hat{ص}$ م) = ٥٠ (فرضًا) ، ∵ ق (ص $\hat{ع}$ م) = ٤٠° (فرضًا)

∴ ق (ص $\hat{م}$ ع) = ١٨٠° - (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

ومنه نستنتج أن : $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ل}}$ (مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°)

∴ القطران متعامدان (٤)

∴ من (٣) ، (٤) الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع قطراه متعامدان .

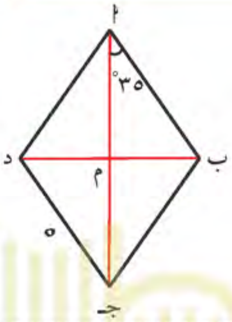
∴ الشكل س ص ع ل معين .

تذكر أنَّ :
- الرمز ⊥ هو رمز عمودي على .
- الرمز // هو رمز موازٍ لِـ .
- مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠° .

فكِّر وناقِش

يستطيع خالد أنَّ يذكر الحالات التي يكون فيها متوازي أضلاع معينًا . فهل تستطيع أن تتحدى خالد بإعطاء أمثلة لكل حالة .

تمــرَّنْ :



١ أ ب جـ د معين تقاطع قطريه في م ، ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٣٥° ، جـ د = ٥ وحدة طول .

أ احسب قياسات زوايا المعين .

ق (ب $\hat{أ}$ د) = ق (ب $\hat{جـ}$ د) = ٧٠°

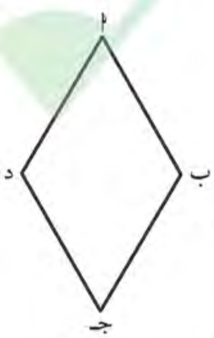
ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (أ $\hat{د}$ جـ) = ١١٠°

ب أوجد طول $\overline{ب جـ}$.

ب جـ = ٥ وحدة طول

جـ أوجد قياس أ $\hat{م}$ ب .

ق (أ $\hat{م}$ ب) = ٩٠°



٢ أ ب جـ د معين طول قطره $\overline{ب د}$ يساوي طول ضلعه .
أوجد قياسات زوايا المعين أ ب جـ د الأربع .

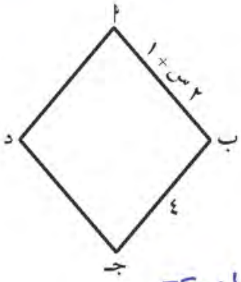
△ أ ب د متطابق الاضلاع

ق (ب $\hat{أ}$ د) = ٦٠°

أ ب جـ د معين

ق (ب $\hat{أ}$ د) = ق (ب $\hat{جـ}$ د) = ٦٠°

ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (أ $\hat{د}$ جـ) = ١٢٠°



٣ أ ب جـ د معين ، أ ب = ٢ س + ١ وحدة طول ، ب جـ = ٤ وحدة طول . أوجد قيمة س .

أ ب جـ د معين

أ ب = ب جـ = جـ د = أ د اضلاع المعين متطابقة

أ ب = ب جـ

٢س + ١ = ٤

٢س = ٤ − ١

٢س = ٣

س = $\frac{٣}{٢}$

٤ في الشكل أمامك ، أثبت أنَّ أ ب جـ د معين .

أ د = ب جـ معطى

ق(أ د̂ ب) = ق(جـ ب̂ د) = ٥٥° هما في وضع تبادل

أ د // ب جـ

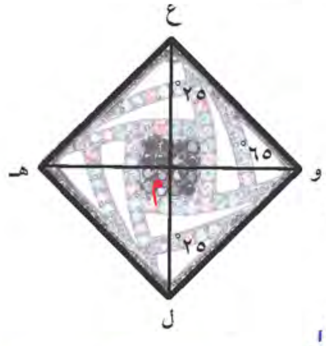
من ① و ② أ ب جـ د متوازي اضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين

△ أ ب د فيه: ق(أ ب̂ د) = ق(أ د̂ ب) = ٥٥° معطى

أ ب = أ د

أ ب جـ د معين لأنه متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

٥ يستعمل مصممو المجوهرات أشكالًا هندسية في تصميماتهم للحصول على أشكال جذابة ومميزة تخصهم .
الصورة المقابلة لقطعة ألماس تبدو رُباعية الشكل .



الشكل ع و ل هـ فيه :

$\overleftarrow{\text{ع ل}}$ منصف لكل من (و $\hat{\text{ع}}$ هـ) و (و $\hat{\text{ل}}$ هـ)

ق (و $\hat{\text{ع}}$ م) = ق (و $\hat{\text{ل}}$ م) = ٢٥° ، ق (ع $\hat{\text{و}}$ م) = ٦٥° .

أثبت أنَّ الشكل الرباعي ع و ل هـ معين .

ع ل منصف للزاويتين (و ع هـ) ، (و ل هـ) معطى

ق (و $\hat{\text{ع}}$ م) = ق (هـ $\hat{\text{ل}}$ م) = ٢٥°

هما في وضع تبادل وتوازي

ع و // هـ ل

ق (هـ $\hat{\text{ع}}$ م) = ق (و $\hat{\text{ل}}$ م) = ٢٥° هما في وضع تبادل

و ل // ع هـ

الشكل ع و ل هـ متوازي اضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

△ و ع ل فيه : ق (و $\hat{\text{ع}}$ ل) = ق (و $\hat{\text{ل}}$ ع) = ٢٥°

و ع = و ل

الشكل ع و ل هـ معين لأن متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

٨-٦ المربع (خواصه والكشف عنه)
Exploring Square and his Properties

سوف تتعلّم : خواص المربع والشروط التي يكون فيها متوازي الأضلاع مربعًا .

> **تذكر أنَّ :**
> خواص المستطيل :
> ١ - له جميع خواص متوازي الأضلاع .
> ٢ - القطران متطابقان .
> ٣ - زواياه الأربع قوائم .

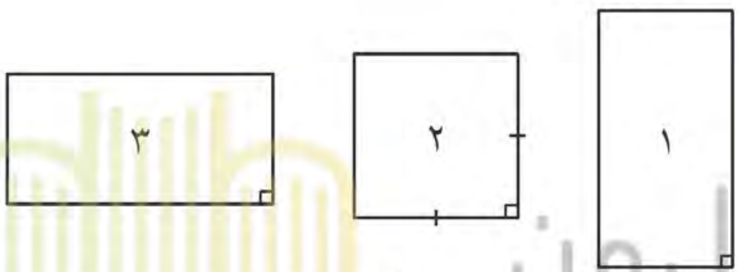
> **تذكر أنَّ :**
> خواص المعين :
> ١ - له جميع خواص متوازي الأضلاع .
> ٢ - القطران متعامدان .
> ٣ - الأضلاع متطابقة .
> ٤ - القطران ينصف كلّ منهما زواياه المتقابلة .

> **تذكر أنَّ :**
> خواص متوازي الأضلاع
> ١ - كل ضلعين متقابلين متطابقان .
> ٢ - كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .
> ٣ - القطران ينصف كلّ منهما الآخر .

نشاط (١) :

لديك مجموعتان من الأشكال الرباعية :

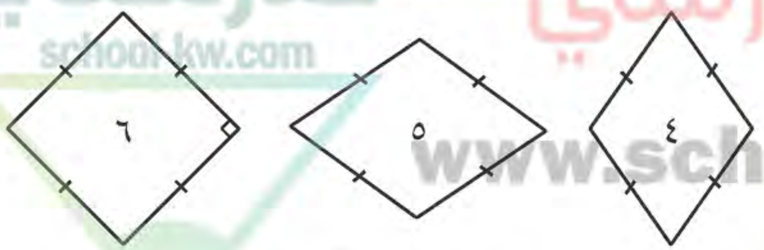
مجموعة (١)
مستطيلات



• الأشكال (١) ، (٢) ، (٣) كل منها يمثل مستطيلًا ، إلا أنَّ الشكل رقم (٢) يتميز بـ ضلعان متجاوران متطابقان ونسمي هذا الشكل مربع .

المربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان (متساويان في الطول) .

مجموعة (٢)
معينات



• الأشكال (٤) ، (٥) ، (٦) كل منها يمثل معينًا ، إلا أنَّ الشكل رقم (٦) يتميز بـأنَّ إحدى زواياه قياسها ٩٠° .

نسمي هذا المعين والذي إحدى زواياه = ٩٠° بالمربع .

المربع هو معين قياس إحدى زواياه ٩٠° .

نلاحظ ممّا سبق أنَّ :

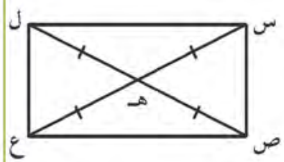
للمربع كل خواص المستطيل وكل خواص المعين .

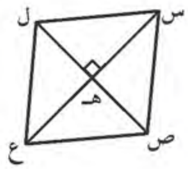
فكِّر وناقِش

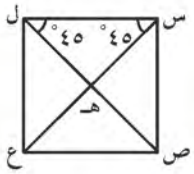
هل المربع متوازي أضلاع ؟ فسر ذلك . نعم لأن المربع فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

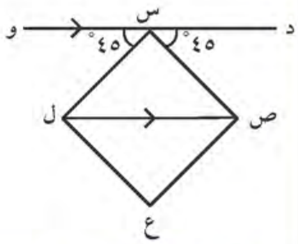
تدرّب (١) :

إذا كان س ص ع ل متوازي أضلاع ، فضع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثل مربعًا مع ذكر السبب :







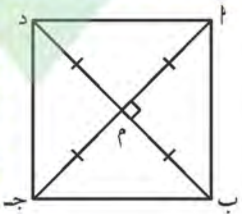


☐	☐	✓	✓
		س هـ = هـ ل	ق(ل سَ ص) = ٩٠°
		ق(س هـَ ل) = ٩٠°	س ص = س ل

الكشف عن المربع

ما الشروط التي يجب أن يحققها متوازي الأضلاع ليكون مربعًا ؟

إذا كان في متوازي الأضلاع القطران متطابقان ومتعامدان ، فإنَّ متوازي الأضلاع هو **مربع** .



في الشكل المقابل أ ب جـ د متوازي أضلاع

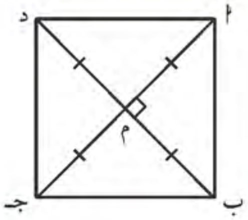
أثبت أنَّ : أ ب جـ د مربع .

المعطيات :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ، أ جـ = ب د

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د مربع

خطوات البرهان كالتالي :



الحالة الأولى :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه :

أ جـ = ب د **(قطراه متطابقان)**

∴ أ ب جـ د مستطيل **(١)**

من تطابق Δ أ م ب ، Δ أ م د (ض . ز . ض) ⟸ أ ب = أ د **(ضلعان متجاوران متطابقان) (٢)**

∴ من (١) ، (٢) أ ب جـ د مربع

الحالة الثانية :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه :

$\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ **(قطراه متعامدان)**

∴ أ ب جـ د معين **(١)**

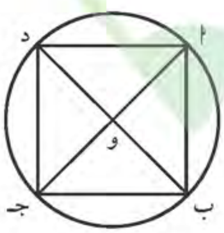
∵ Δ أ م ب قائم ومتطابق الضلعين (م أ = م ب) ⟸ ق (م $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٤٥° ،

بالمثل ق (م $\hat{\text{أ}}$ د) = ٤٥° **(قطرا المعين ينصفان زواياه)**

∴ ق (ب $\hat{\text{أ}}$ د) = ٩٠° **(قياس إحدى الزوايا قائمة) (٢)**

∴ من (١) ، (٢) أ ب جـ د مربع

تدرب (٢) :



في الشكل المقابل $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ قطران في دائرة مركزها و ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$. أثبت أنَّ أ ب جـ د مربع .

المعطيات : (١) و مركز الدائرة ، (٢) $\overline{\text{أ جـ}} \perp$ ......ب د......

المطلوب : إثبات أنَّ أ ب جـ د ......مربع......

البرهان : ∵ و مركز الدائرة

∴ أ و = ...ب و...... = ...جـ و...... = ...د و......

....

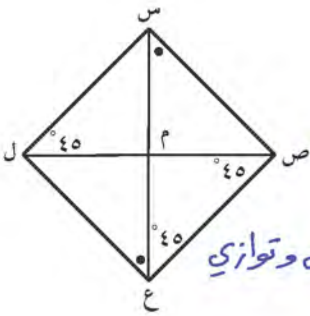
∴ أ جـ = ...ب د...... ، القطران ......متطابقان...... (١)

ولكن $\overline{\text{أ جـ}} \perp$ ......ب د...... (٢)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) أ ب جـ د ......مربع......

تمــرَّنْ :

١ باستخدام المعطيات في الرسم أثبت أنَّ :
س ص ع ل مربع الشكل .



ق(ص سْ ع) = ق(ل عْ س) هما في وضع تبادل وتوازي

س ص // ل ع

ق(ع صْ ل) = ق(س لْ ص) = ٤٥° هما في وضع تبادل وتوازي

ص ع // س ل

ينتج ان س ص ع ل متوازي اضلاع لأن شكل رباعي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

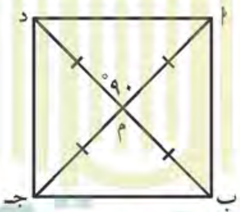
△ ص م ع فيه : ق(ص مْ ع) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°

س ع ⊥ ص ل

ص م = م ع

⟸ س ص ع ل مربع لأنه متوازي اضلاع فيه قطران متعامدان ومتطابقان

٢ مستعينًا بالمعطيات على الرسم أثبت أنَّ الشكل مربع .



أ م = م جـ ، ب م = م د

أ ب جـ د متوازي اضلاع لأن القطران ينصف كل منهما الآخر

ق(أ مْ د) = ٩٠°

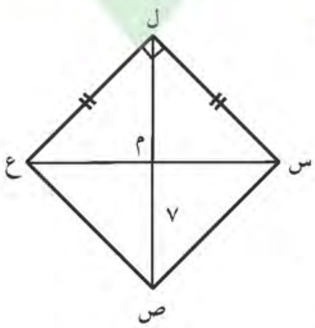
أ جـ ⊥ ب د القطران متعامدان

أ م = م جـ = ب م = م د

أ جـ = ب د القطران متطابقان

ينتج ان أ ب جـ د مربع لأنه متوازي اضلاع فيه قطران متطابقان ومتعامدان

٣ في الشكل المقابل ل س ص ع مربع فيه : ل م = ٣ ب + ٤ ،
ع م = ٢ جـ − ١ ، م ص = ٧ . أوجد قيمة كلٍّ من ب ، جـ .



٣ ب + ٤ = ٧	٢ جـ − ١ = ٧
٣ ب = ٧ − ٤	٢ جـ = ٧ + ١
٣ ب = ٣	٢ جـ = ٨
ب = ١	جـ = ٤

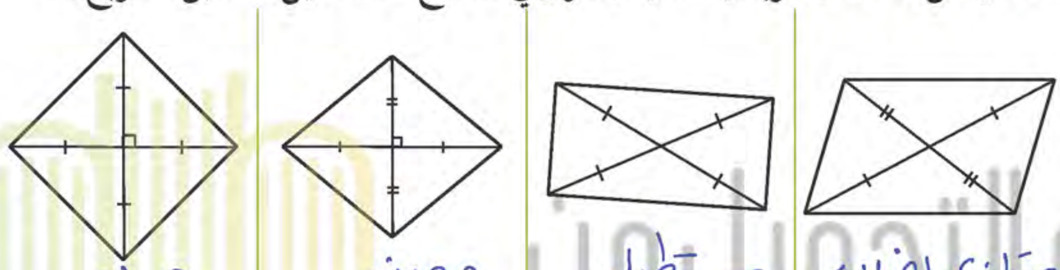
٨-٧ تطبيقات (حل مسائل على الأشكال الرباعية)
Applications (Problem Solving on Quadrilaterals)

سوف تتعلّم : حل مسائل على الأشكال الرباعية .

تذكر أنَّ :
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان :
- فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .
- فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان .
- فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان .
- فيه القطران ينصف كل منهما الآخر .
- فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

نشاط :

حدّد أيًّا من الأشكال الرباعية التالية (متوازي أضلاع – مستطيل – معين – مربع) :



متوازي اضلاع .... مستطيل .... معين .... مربع

تدرّب (١) :

أ ب جـ د مربع ، هـ منتصف أ د ، و منتصف ب جـ

أثبت أنَّ : أ و جـ هـ متوازي أضلاع و منتصف ب جـ

المعطيات : أ ب جـ د مربع ، هـ منتصف أ د

المطلوب : إثبات أنَّ : أ و جـ هـ متوازي اضلاع

البرهان :

أ ب جـ د مربع (معطى)

∴ أ د = ب جـ (أطوال أضلاع المربع متطابقة)

∵ هـ منتصف أ د (معطى) ، ∴ أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ د

∵ و منتصف ب جـ (معطى) ، ∴ و جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ أ هـ = و جـ (من خواص المساواة) (١)

∵ أ د // ب جـ (من خواص المربع)

∴ أ هـ // و جـ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

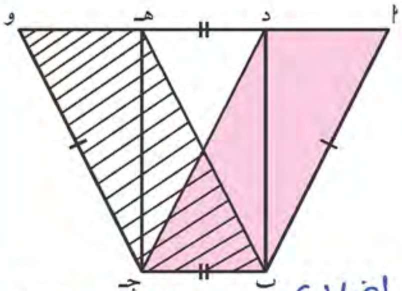
الشكل أ و جـ هـ متوازي اضلاع (لأنَّه شكل رباعي فيه ضلعان متطابقان ومتوازيان)

تدرّب (٢) :

أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع .

د ، هـ ∈ $\overline{أو}$ بحيث د هـ = ب جـ ، أ ب = و جـ

أثبت أنَّ : د ب جـ هـ مستطيل .



تذكر أنَّ :
يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا كان :
١ – إحدى زواياه قائمة (قياسها ٩٠°) .
٢ – القطران متساويان في الطول .

المعطيات : أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا اضلاع د هـ = ب جـ
أ ب = و جـ

المطلوب : إثبات أنَّ : د ب جـ هـ مستطيل

البرهان :

∵ أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا اضلاع (معطى)

∴ $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{هـ و}$ // ب جـ (من خواص متوازي الاضلاع)

∵ د ، هـ ∈ أ جـ (معطى)

∴ $\overline{د هـ}$ // ب جـ (١)

د هـ = ب جـ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنَّ :

د ب جـ هـ متوازي اضلاع (لأنَّه شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان متطابقان) (٣)

∵ أ ب = د جـ ، و جـ = هـ ب (من خواص متوازي الأضلاع)

∵ أ ب = و جـ (معطى)

∴ أ ب = د جـ = ب هـ = و جـ (من خواص المساواة)

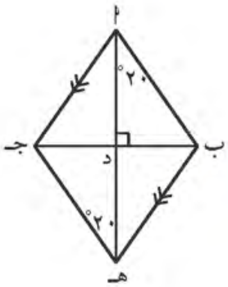
∴ د جـ = هـ ب ، ∴ القطران متطابقان (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أنَّ :

الشكل د ب جـ هـ مستطيل (لأنَّه متوازي أضلاع فيه قطران متطابقان)

تدرَّب (٣) :

في الشكل المقابل ، أثبت أنَّ : أ ب هـ جـ معين .



المعطيات : (١) أجـ // ب هـ ، (٢) أهـ ⊥ ب جـ
(٣) ق(ب أ هـ) = ق(أ هـ جـ) = ٢٠°

المطلوب : اثبات ان أ ب هـ جـ معين

البرهان : أجـ // ب هـ ، .... (١)

∵ ق (ب أ هـ) = ق (أ هـ جـ) (وهما في وضع تبادل)

∴ أب // جـ هـ (٢)

∴ من (١)، (٢) الشكل أ ب هـ جـ متوازي اضلاع

∴ الشكل أ ب هـ جـ معين لأنه متوازي اضلاع قطراه متعامدان

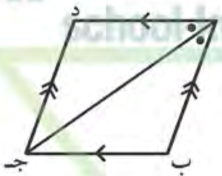
> **تذكر أنَّ :**
> يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا كان :
> ١ - فيه ضلعان متجاوران متطابقان .
> ٢ - القطران متعامدان .

تمــرَّنْ :

١ اكتب اسم الشكل في كل مما يلي حسب المعطيات على الرسم :

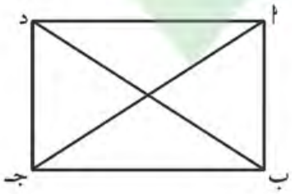
أ) أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أجـ ينصف أ .

معين



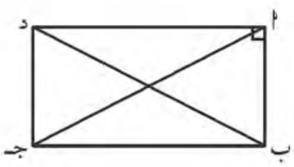
ب) أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ جـ = ب د .

مستطيل



جـ) أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق (أ) = ٩٠° .

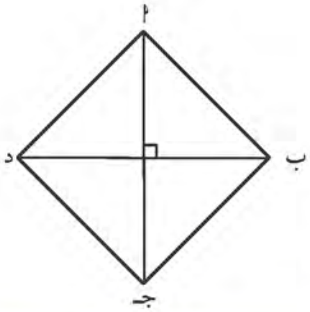
مستطيل



> **تذكر أنَّ :**
> يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا كان :
> ١ - إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متطابقان .
> ٢ - إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدان .
> ٣ - القطران متساويان في الطول ومتعامدان .

د ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه $\overline{اجـ} \perp \overline{ب د}$ ،

ا جـ = ب د



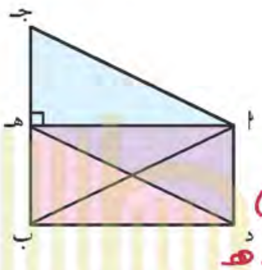
مربع

---

٢ في الشكل ا ب جـ مثلث متطابق الضلعين ،

ا د هـ جـ متوازي أضلاع ، $\overline{اهـ} \perp \overline{ب جـ}$.

أثبت أنَّ : الشكل ا د ب هـ مستطيل .



∆ ا ب جـ متطابق الضلعين فيه : $\overline{اهـ} \perp \overline{ب جـ}$ (معطى)

هـ ب = هـ جـ ، ا د هـ جـ متوازي اضلاع ، ا د = جـ هـ

اذاً ينتج ان ا د = هـ ب ، ا د // جـ هـ من خواص متوازي الاضلاع

ب ∈ جـ هـ ، ا د // ب هـ اذاً الشكل ا د ب هـ متوازي اضلاع

∆ ا ب جـ متطابق الضلعين ا جـ = ا ب ، ا د هـ جـ متوازي الاضلاع

ا جـ = د هـ اذاً ا ب = د هـ القطران متطابقان

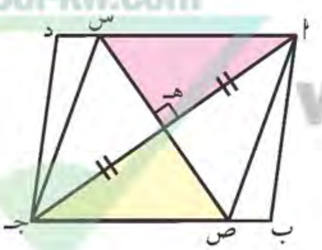
الشكل ا د ب هـ مستطيل

---

٣ ا ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{س ص} \perp \overline{اجـ}$ ،

هـ منتصف $\overline{اجـ}$ ، س ∈ $\overline{اد}$ ، ص ∈ $\overline{ب جـ}$.

أثبت أنَّ : الشكل ا ص جـ س معين .



∆ ا هـ س ، ∆ جـ هـ ص فيهما

ا هـ = جـ هـ

ق(ا هـ س) = ق(جـ هـ ص) = ٩٠

ق(س ا هـ) = ق(ص جـ هـ) بالتبادل والتوازي

∆ ا هـ س ≅ ∆ جـ هـ ص بحالة (ز ، ض ، ز)

ينتج ان ا س = ص جـ (١)

س ∈ ا د ، ص ∈ ب جـ

$\overline{ا س} // \overline{ص جـ}$ (٢)

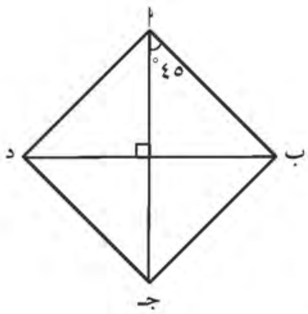
من (١) ، (٢) ينتج ان ا ص جـ س متوازي اضلاع (٣)

$\overline{س ص} \perp \overline{ا هـ}$ (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج ان ا ص جـ س معيناً

٤ أ ب جـ د معين فيه ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٤٥°

أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د مربع .



أ ب جـ د معين

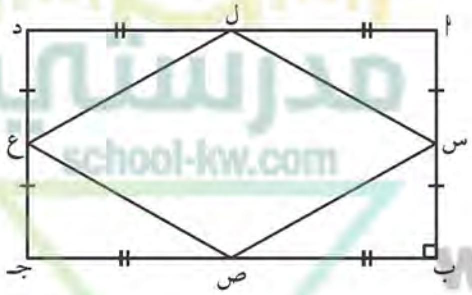
$\overleftrightarrow{أجـ}$ ينصف الزاوية د أ ب

ق (د $\hat{أ}$ ب) = ٩٠

أ ب جـ د مربع

٥ أ ب جـ د مستطيل فيه س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـد}$ ، $\overline{دأ}$ على الترتيب .

أثبت أنَّ س ص ع ل معين .

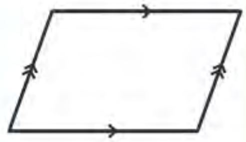
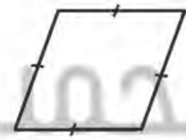
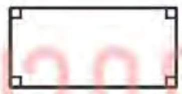
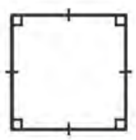
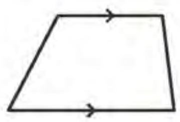


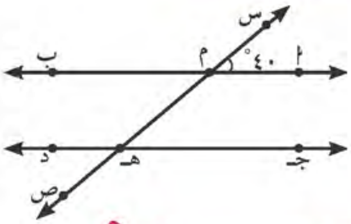
باستخدام تطابق المثلثات أ ل س

ب س ص ، جـ ص ع ، د ع ل نجد ان س ل = ل ع = ع ص = ص س

اذاً ل س ص ع معين

الأشكال الرباعية

اسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواص الشكل
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .	- الأضلاع المتقابلة متطابقة . - يتقاطع القطران في منتصفهما . - نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظر له . - كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس . - كل زاويتين متتاليتين متكاملتان .
المعين		هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان .	- أضلاعه الأربعة متطابقة . - القطران متعامدان وينصف كل منهما الآخر . - كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين فيه .
المستطيل		هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .	- زواياه الأربع قائمة . - قطراه متطابقان ويتقاطعان في منتصفهما .
المربع		- هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متطابقان وزاوية قائمة. - هو معيّن له زاوية قائمة . - هو مستطيل له ضلعان متجاوران متطابقان .	- قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . - زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . - قطر المربع يصنع مع كل ضلع من أضلاع المربع زاوية قياسها ٤٥° .
شبه المنحرف		هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .	

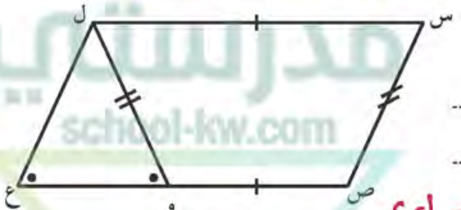


١ في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ،
$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ قاطع لهما في م ، هـ على الترتيب ،
ق (أ م̂ س) = ٤٠° ، أوجد مع ذكر السبب :

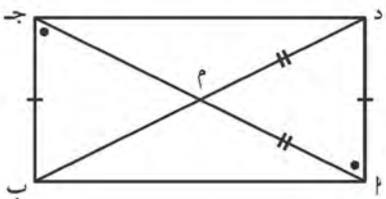
أ ق (جـ هـ̂ م) ..٤٠°.. السبب : بالتناظر والتوازي مع أ م̂ س

ب ق (جـ هـ̂ ص) ..١٤٠°.. السبب : بالتجاور على مستقيم مع جـ هـ̂ م

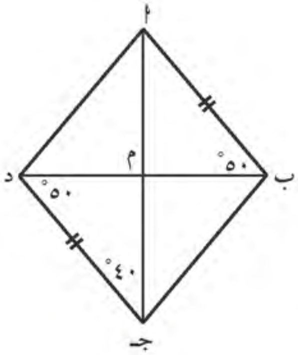
جـ ق (م هـ̂ د) ..١٤٠°.. السبب : بالتقابل بالرأس مع جـ هـ̂ ص



٢ أثبت أنَّ : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .
△ ل و ع فيه ق (ل و̂ ع) = ق (ع̂)
∴ △ ل و ع متطابق الضلعين
ل و = ل ع ، س ص = ل و إذاً س ص = ل ع
وبما أن س ل = ص ع (معطى)
الشكل س ص ع ل فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين
الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع



٣ أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د مستطيل .
ق (د أ̂ جـ) = ق (ب جـ̂ أ) في وضع تبادل وتوازي
د أ // جـ ب
د أ = جـ ب
إذاً د أ ، جـ ب ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان
الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع
م نقطة تقاطع قطريه (القطران ينصف كل منهما الآخر)
د م = م ب   م أ = م جـ
م د = م أ   د ب = أ جـ القطران متطابقان
الشكل أ ب جـ د مستطيل



٤ أثبت أنَّ : الشكل أ ب جـ د معين .

ق(أ ب̂ د) = ق(جـ د̂ ب) = ٥٠° في وضع تبادل وتوازي

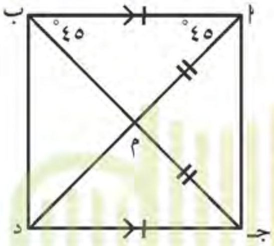
أ ب // د جـ } ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان
أ ب = د جـ

الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

ق(م جـ̂ د) = ٤٠° ، ق(م د̂ جـ) = ٥٠°

ق(د م̂ جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

∴ أ جـ ⊥ ب د القطران متعامدان ⇐ الشكل أ ب جـ د معين



٥ أثبت أنَّ : الشكل أ ب د جـ مربع .

أ ب = جـ د } ضلعان متقابلان متوازيان
أ ب // جـ د

الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

في △ م أ ب ∵ ق(م أ̂ ب) = ق(م ب̂ أ) = ٤٥° مثلث متطابق الضلعين

ق(أ م̂ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°

أ م ⊥ ب م ⇐ أ د ⊥ ب جـ (القطران متعامدان) ⇐ △ م أ ب متطابق الضلعين

م أ = م ب ∴ أ ب = ب جـ القطران متطابقان ⇐ الشكل أ ب د جـ مربع

٦ في الشكل المقابل : و مركز الدائرة ،

أثبت أنَّ الشكل : أ ب جـ د معين .

من خواص الدائرة انصاف الاقطار متطابقة

و أ ≅ و جـ ، و س ≅ و ص ∵ س ب = د ص

س و − س ب = و ص − د ص ⇐ و ب = و د } القطران ينصف كل منهما الآخر
∵ و أ = و جـ

الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

أ جـ ⊥ ب د (القطران متعامدان) اذاً أ ب جـ د معين

٧ تهتم شركات الإلكترونيات الحديثة في تصميماتها على الأشكال الهندسية المتنوعة . ففي الصورة أمامك شاشة لجهاز التلفاز رُباعية الشكل .

الشكل الرباعي أ ب جـ د فيه :

ق (١̂) = ق (٢̂) = ق (٣̂) ، ب جـ = أ د .

أثبت أنَّ الشكل أ ب جـ د مستطيل .

ق(١̂) = ق(٢̂) وهما في وضع تبادل وتوازي

أ د // ب جـ } ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان
أ د = ب جـ

الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

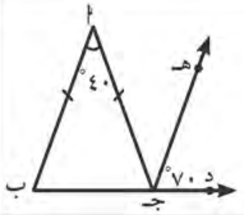
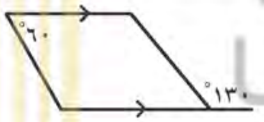
ق(٢̂) = ق(٣̂) في △ م ب جـ

م ب = م جـ م نقطة تقاطع القطرين

ب د = أ جـ اي ان القطران متطابقان ⇐ الشكل أ ب جـ د مستطيل

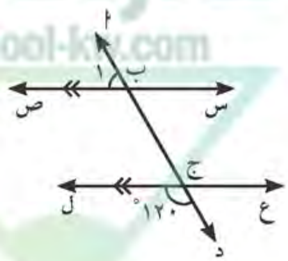
اختبار الوحدة الثامنة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المربع هو معين قطراه متطابقان .	أ	ب
٢ في الشكل المرسوم $\overline{بأ}$ // $\overleftarrow{جـ هـ}$ 	أ	ب
٣ الشكل المقابل يمثل مستطيلًا 	أ	ب
٤ الشكل الرباعي المرسوم يمثل متوازي أضلاع 	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

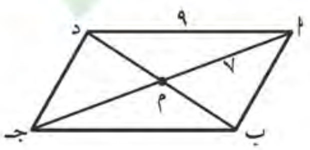
٥ في الشكل المقابل ق ($\hat{١}$) يساوي :



(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠°

(جـ) ١٨٠° (د) ٣٦٠°

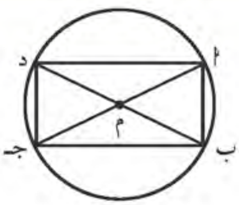
٦ في متوازي الأضلاع المرسوم ، أجـ =



(أ) ٧ وحدة طول (ب) ٣ وحدة طول

(جـ) ١٤ وحدة طول (د) ٩ وحدة طول

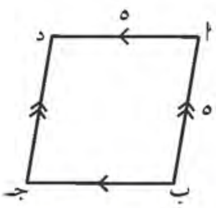
٧ الشكل المقابل يمثل دائرة مركزها م فإنَّ الشكل أ ب جـ د هو :



(أ) مربع (ب) مستطيل

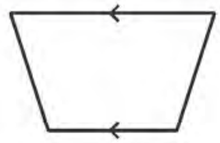
(جـ) معين (د) شبه منحرف

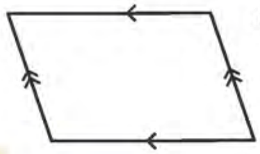
٨ في الشكل المقابل أ ب جـ د يمثل :

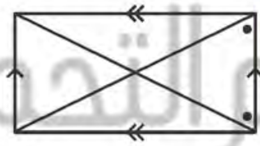


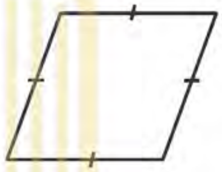
أ معين
ب مستطيل
جـ مربع
د شبه منحرف

٩ الشكل الذي يمثل مستطيلًا هو :

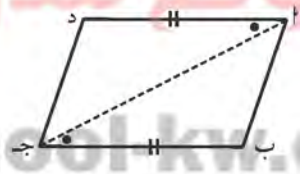
أ


ب


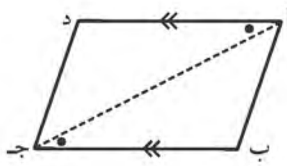
جـ


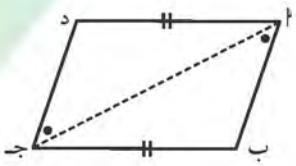
د


١٠ الشكل الذي يمثل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

أ


ب


جـ


د


الوحدة التاسعة

المقادير الجبرية
Algebraic Expressions

بيئتي
My Environment

مشروع الوحدة :
(مرافق ترفيهية)

الترفيه هو نشاط نقوم به في أوقات الفراغ ، وتعتبر الحاجه للقيام بأنشطة ترويحية عنصرًا أساسيًا في علم النفس وعلم الأحياء البشري ، لذا ظهرت أهمية المرافق الترفيهية ليقوم الإنسان بالأنشطة المتنوعة .

خطة العمل :

- تحدد المجموعة بعض الأماكن الترفيهية في بيئتها وتذكر عمر المكان وتحدد العلاقة بين عمر المرفق وعمر الأشخاص في بيئتهم (معلم – مدير – إخصائي) .

خطوات تنفيذ المشروع :

- تكون المجموعة جدولاً بأسماء بعض المرافق الترفيهية من بيئتهم وتحدد عمر المرفق .
- تحدد المجموعة أشخاصًا من بيئتهم ويرمز إليهم بالرموز (س ، ص ....) .
- تحدد المجموعة العلاقة المسجلة في الجدول سواء بالزيادة عن العمر أو بالنقصان أو الضعف .... أكمل الجدول لبدء المشروع .
- توجد المجموعة عمر الشخص المطلوب بالسنين .

الصيغ اللفظية	الصيغة بالرموز
ضعف عدد	
نصف عدد	
يزيد بمقدار ٢	
ينقص بمقدار ١	

المرفق	عمر المرفق بالسنوات	اسم الشخص من بيئتك وعمره بالرموز	العلاقة اللفظية للشخص مع المرفق	العمر بالسنين للشخص
محمية صباح الأحمد	٣٠	معلم الصف س	يساوي (=)	٣٠
حديقة الحيوانات	٤٠	مدير المدرسة ص	المرفق يقل ١٠ سنوات عن ص	
أبراج الكويت				
منتزه الخيران				
....				

علاقات وتواصل :

- يناقش أفراد المجموعة الجداول ويتحققون من صحة عمر الأشخاص المعروضين .

عرض العمل :

- تعرض كل مجموعة الجدول الصحيح وتشرحه للمتعلمين في الفصل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة التاسعة

- المقادير الجبرية
  - الحد الجبري
    - مُتغيرات
    - ثوابت
    - أُسس
  - كثيرات الحدود
    - جمع وطرح
    - ضرب
    - قسمة

٩-١ قوانين الأسس
Laws of Exponents

العبارات والمفردات :

أس Exponent

أساس Base

قوى Power

سوف تتعلّم : قوانين الأسس .

نشاط (١) :

قررت إحدى الشركات الكبرى للبناء وضع مخطّط على عدة مراحل لبناء إحدى الضواحي السكنية . لاحظ الصور للمراحل الثلاث الأولى ، ثم أكمل :

المرحلة الأولى : ٢ = $٢^{١}$

المرحلة الثانية : ٤ = ٢ × ٢ = $٢^{٢}$

المرحلة الثالثة : ٨ = ٢ × ٢ × ٢ = $٢^{٣}$

$\underbrace{\text{ﻡ} \times \text{ﻡ} \times \text{ﻡ} \times \ldots \times \text{ﻡ}}_{\text{ﻡ مكررة ن مرة}} = \text{ﻡ}^{\text{ن}}$ حيث ﻡ عدد نسبي غير صفري ، ن ∈ $ص_{+}$

ويقرأ « ﻡ أس ن » أو القوة النونية للعدد ﻡ .

معلومات مفيدة :

- تقاس الأبعاد بين الكواكب باستخدام الأسس لبعد المسافات حيث المسافة بين الأرض وكوكب الزهرة ٢٧٥ × $١٠^{٦}$ كيلومتر.

تدرّب (١) :

أكمل الجدول التالي :

الصورة الأسية	الأساس	الأس	صورة الضرب المتكرر	الناتج
$٤^{٢}$	٤	٢	٤ × ٤	١٦
$٣^{٥}$	٣	٥	٣ × ٣ × ٣ × ٣ × ٣	٢٤٣
$٢^{٤}$	٢	٤	٢ × ٢ × ٢ × ٢	١٦
$(-٥)^{٣}$	−٥	٣	−٥ × −٥ × −٥	−١٢٥
٣	٣	١	٣	٣
$س^{٤}$	س	٤	س × س × س × س	$س^{٤}$
$(\frac{-٣}{٥})^{٢}$	$\frac{-٣}{٥}$	٢	$-\frac{٣}{٥} \times -\frac{٣}{٥}$	$\frac{٩}{٢٥}$
$(\frac{١}{٢})^{٤}$	$\frac{١}{٢}$	٤	$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$	$\frac{١}{١٦}$

تذكَّرْ أنّ :

- نسمي الصورة $٢^{٣}$ بالصورة الأسية حيث ٢ يسمى الأساس و٣ الأس ، وتقرأ ٢ أس ٣ أو ٢ للقوة ٣ أو ٢ تكعيب .

نشاط (٢):

أكمل ما يلي:

$$٢^{٢} \times ٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{\square} = ٢^{(٢+٣)}$$

$$٣^{٢} \times ٣^{٤} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^{\boxed{٦}} = ٣^{(٢+٤)}$$

ماذا تلاحظ؟ الاساسات نفسها وعند ضرب الاساسات نجمع الاسس

لكل $أ$ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$.

تدرّب (٢):

اختصر كلًّا مما يلي:

أ) $٦^{٤} \times ٦^{٧} = ٦^{٤+٧} = ٦^{١١}$

ب) $س^{٢} \times س^{٣} = س^{٢+٣} = س^{٥}$

جـ) $ص \times ص^{٢} \times ص^{٣} = ص^{١+٢+٣} = ص^{٦}$

د) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢+٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

فكِّر وناقِش

هل العبارة $٣^{٢} \times ٢^{٣} = ٦^{٥}$ صحيحة؟ فسِّر إجابتك. غير صحيحة لان الاساسات غير متساوية

نشاط (٣):

تذكَّرْ أنّ: $ص = ص^{١}$

أكمل ما يلي:

أ) $\frac{٣^{٥}}{٣^{٢}} = \frac{٣ \times ٣ \times ٣ \times \cancel{٣} \times \cancel{٣}}{\cancel{٣} \times \cancel{٣}} = ٣^{٣} = ٣^{٥-٢}$

ب) $\frac{٧^{٣}}{٧} = \frac{٧ \times ٧ \times \cancel{٧}}{\cancel{٧}} = ٧^{٢} = ٧^{٣-١}$

ماذا تلاحظ؟ عند قسمة الاساسات المتساوية
نقوم بطرح الاسس

لكل $أ$ عدد غير نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون: $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$.

تدرّب (٣):

اختصر كلًّا مما يلي:

أ) $\frac{٨^{٥}}{٨^{٣}} = \frac{٨ \times ٨ \times ٨ \times ٨ \times ٨}{٨ \times ٨ \times ٨} = ٨^{٢} = ٦٤$

ب) $\frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٥}} = \text{س}^{٥-٥} = \text{س}^{٠} = ١$

ج) $\frac{\text{س}^{٧}}{\text{س}^{-٣}} = \text{س}^{٧-(-٣)} = \text{س}^{٧+٣} = \text{س}^{١٠}$

د) $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٧}} = \text{س}^{٤-٧} = \text{س}^{-٣} = \frac{١}{\text{س}^{٣}}$

تذكَّرْ أنّ:
س − ص = س + (− ص)

فكِّر وناقش

ماذا تلاحظ على ب ، د في تدرب (٣) ؟ فسِّر إجابتك.

في (ب) يكون أس المقام يساوي أس البسط فيكون الناتج ١
في (د) الأس في المقام أكبر من الأس في البسط فيكون الناتج سالب

لكل أ نسبي عدد غير صفري ، م عدد صحيح يكون : (١) $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$
(٢) $\text{أ}^{-\text{م}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{م}}}$

تدرّب (٤):

اختصر ما يلي:

أ) $٧^{-٣} \times ٧ = ٧^{-٣+١} = ٧^{-٢} = \frac{١}{٧^{٢}} = \frac{١}{٤٩}$

ب) $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-٢}} = ٩^{-٣+٢} = ٩^{-١} = \frac{١}{٩}$

ج) $٨^{٥} \times ٨^{-٤} = ٨^{٥+(-٤)} = ٨^{١} = ٨$

هـ) $\text{س}^{٤} \times \text{س}^{-٦} = \text{س}^{٤+(-٦)} = \text{س}^{-٢} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

نشاط (٤):

أوجد ناتج ما يلي:

أ) $(٢ \times ٣)^{٢} = ٦^{\boxed{٢}} = ٣٦$

ب) $(٥ \times ٤)^{٣} = ٢٠^{\boxed{٣}} = ٨٠٠٠$

ج) $٢^{٢} \times ٣^{٢} = ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣ = ٤ \times ٩ = ٣٦$

د) $٥^{٣} \times ٤^{٣} = ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٤ \times ٤ \times ٤ = ٨٠٠٠$

ماذا تستنتج بالنسبة لـ أ ، ج معًا ، ب ، د معًا ؟

يجب إجراء عملية الضرب ثم نوجد ناتج الأسس

لكل أ ، ب عددان نسبيان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $(\text{أ} \times \text{ب})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{ب}^{\text{م}}$.

فكِّر وناقِش

يقول عبد الله إنَّ $(٢ \times ٣)^٢ = ٢ \times ٣^٢$. هل توافقه الرأي ؟ لا $٢^٢ \times ٣^٢$

مثال (١) : اختصر كلًّا مما يلي:

أ) $(٤\text{أ})^٥ = ٤^٥ \text{أ}^٥ = ١٠٢٤ \text{أ}^٥$

ب) $(٢ \text{ س ص})^٤ = ٢^٤ \text{س}^٤ \text{ص}^٤ = ١٦ \text{س}^٤ \text{ص}^٤$

ج) $\text{ص س}^٢ \times \text{ص}^٣ = \text{ص}^٤ \times \text{س}^٢$

نشاط (٥) :

أوجد ناتج ما يلي معتمدًا على قوانين الأسس :

أ) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢^٢}{٣^٢} = \frac{٤}{٩}$

ب) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^٣ = \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣^٣}{٥^٣} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

ج) $\frac{٤^٥}{٢^٥} = \left(\frac{٤}{٢}\right)^٥ = (٢)^٥$

ماذا تستنتج ؟ لكل أ ، ب عددان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$

لكل أ ، ب عددان نسبيان غير صفريين ، م عدد صحيح يكون $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$.

ملاحظة: $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-\text{م}} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{\text{م}}$

تدرّب (٥) :

أوجد ناتج ما يلي معتمدًا على قوانين الأسس .

أ) $\frac{٢٤^٥}{٨^٥} = \left(\frac{٢٤}{٨}\right)^٥ = (٣)^٥$

ب) $\frac{٢^٤}{٦^٤} = \left(\frac{١}{٣}\right)^٤ = \frac{١}{٨١}$

ج) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^٣ = \frac{٨}{١٢٥}$

د) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٢} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{+٢} = \frac{٤^٢}{٣^٢} = \frac{١٦}{٩} = ١\frac{٧}{٩}$

نشاط (٦) :

أكمل ما يلي :

أ) $(٣^{٢})^{٣} = ٣^{٢} \times ٣^{٢} \times ٣^{٢}$

$= ٣^{٦}$

$= ٣^{٢ \times ٣}$

ب) $(أ^{٣} ب^{٢})^{٢} = أ^{٣} ب^{٢} \times أ^{٣} ب^{٢}$

$= أ^{٦} \times ب^{٤}$

$= أ^{٣ \times ٢} \times ب^{٢ \times ٢}$

ماذا تلاحظ ؟ نضرب الاس خارج القوس بالاس للعدد داخل القوس

لكل أ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان يكون : $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$.

تدرّب (٦) :

اختصر ما يلي:

أ) $(٣^{-٢})^{٢} = ٣^{-٢ \times ٢} = ٣^{-٤} = (\frac{١}{٣})^{٤} = \frac{١}{٨١}$

ب) $(٥^{-٣})^{-١} = ٥^{-٣ \times -١} = ٥^{٣} = ١٢٥$

جـ) $(٤^{٥})^{-٣} = ٤^{٥ \times -٣} = ٤^{-١٥} = \frac{١}{٤^{١٥}}$

د) $(س^{٢} ص^{٣})^{٤} = س^{٨} ص^{١٢}$

مثال (٢) :

يبلغ طول قطر الشمس نحو $١,٥ \times ١٠^{٦}$ كم ، ويبلغ طول قطر الأرض نحو $١,٢٧٦ \times ١٠^{٤}$ كم .

أوجد نسبة طول قطر الشمس إلى طول قطر الأرض .

الحلّ :

نسبة طول قطر الشمس إلى طول قطر الأرض $= \frac{١,٥ \times ١٠^{٦}}{١,٢ \times ١٠^{٤}} = \frac{١,٢٥ \times ١٠^{٦-٤}}{١}$

$= \frac{١,٢٥ \times ١٠^{٢}}{١}$

تمـــرَّنْ :

١ أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\frac{٩^{٤}}{٣^{٤}} = (\frac{٩}{٣})^{٤} = ٣^{٤} = ٨١$

ب) $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$

جـ) $(٢^{-٤})^{٢} \times ٢^{٥} = ٢^{-٨} \times ٢^{٥} = ٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$

د) $(\frac{٣}{٥})^{٦} \times (\frac{٣}{١٠})^{-٦} = (\frac{٣}{٥})^{٦} \times (\frac{١٠}{٣})^{٦} = (\frac{٣ \times ١٠}{٥ \times ٣})^{٦} = (\frac{١٠}{٥})^{٦} = ٢^{٦} = ٦٤$

٢ اختصر لأبسط صورة :

أ) س × س^{٦} = س^{٧}

ب) (٥^{٢})^{٤} × ٥ = ٥^{٨} × ٥ = ٥^{٩}

جـ) (−٢)^{٣} × (−٢)^{٧} = ٢^{١٠}

د) س^{١١} × س^{٨} = س^{١٩}

هـ) س^{٣} × س × س^{٢} = س^{٦}

و) (س^{٢} ص$^{-٣}$) × (س$^{-٧}$ ص$^{-٤}$) = س$^{-٥}$ ص$^{-٧}$ = $\frac{١}{\text{س}^{٥}\ \text{ص}^{٧}}$

ز) (أ$^{-٣}$ ب) × (أ^{٢} ب^{٢}) × (أ^{٢} ب) = أ ب^{٤}

ح) (س^{٢} ص)$^{-٢}$ × (س^{٣})^{٢} = س$^{-٤}$ ص$^{-٢}$ × س^{٦} = س^{٢} ص$^{-٢}$ = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$

ط) (أ^{٥})^{٢} × (أ ب) = أ^{١٠} × أ ب = أ^{١١} ب

ي) (−٢ص)^{٣} = −٢^{٣} ص^{٣} = −٨ ص^{٣}

٣ يقدّر حجم الأرض بنحو ١٠^{٦} كم^{٣} ،
ويقدر حجم كوكب المشتري بنحو ٣,١٨ × ١٠^{٢}
مرّة من حجم الأرض ، ما حجم المشتري ؟

حجم المشتري = ٣,١٨ × ١٠^{٢} × ١٠^{٦} = ٣,١٨ × ١٠^{٨}
= ٣١٨٠٠٠٠٠٠ كم^{٣}

٩-٢ كثيرات الحدود (متعددة الحدود – الحدوديات)
Polynomials

العبارات والمفردات :

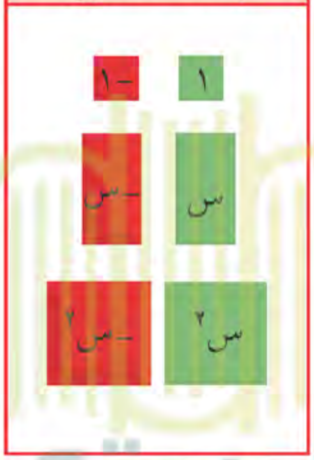
كثيرة الحدود	**Polynomial**
حد	**Term**
وحيدة الحد	**Monomial**
ثنائية الحد (ذات الحدين)	**Binomial**
ثلاثية الحد	**Trinomial**
درجة	**Degree**
حدود متشابهة	**Like Terms**
حدود غير متشابهة	**None Like Terms**
الصورة القياسية	**Standard Form**

سوف تتعلّم : ما هي كثيرات الحدود – إيجاد قيمة كثيرات الحدود وكتابتها بالصورة القياسية .

نشاط :

قسّم المعلم متعلمي الصف إلى مجموعات ، ثم وزّع المعلم على كل مجموعة بعض البطاقات الجبرية وطلب منهم نمذجة ما تعبر عنه البطاقات الجبرية .

البطاقات الجبرية



(١) مجموعة المتعلم فيصل كان نصيبها من البطاقات هو :

التعبير الجبري للنموذج هو : – س^{٢} + ٢ س + ٣

(٢) مجموعة المتعلم بدر كان نصيبها من البطاقات هو :

كما تمت نمذجة بطاقات فيصل ، استخدم بطاقات بدر لكتابة التعبير الجبري للنموذج المعطى :

التعبير الجبري للنموذج هو : ٢س^{٢} – ٣ س – ٤

* التعبيرات الجبرية السابقة مثل : – س^{٢} + ٢ س + ٣ تُسمى كثيرة حدود .

كثيرة الحدود (مقدار جبري) هي تعبير جبري يتكون من واحد أو أكثر من الحدود الجبرية يتم بناؤها باستخدام عمليات الجمع والطرح .

أمثلة :

(١) ٢ س^{٥} ، – ٤ س^{٢} ، س ، – ٣   حدود جبرية

(٢) ٢ س^{٥} – ٤ س^{٢} + س – ٣   كثيرة حدود

(٣) س$^{-٣}$ ، $\sqrt{\text{س}}$ – ٥ س + ٧ ، ٦$^{\text{س}}$ + س^{٢} ليست كثيرات حدود (مقدار جبري)

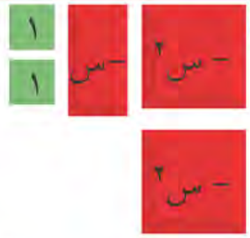
تذكَّرْ أنّ :
٣ س^{٢} يسمى حدًّا جبريًّا حيث :
٣ هو المعامل
س^{٢} هو المتغير

كما في مثال فيصل ، اتبع الخطوات لكتابة الحدوديات باستخدام البطاقات الموضحة :

تدرّب (١) :

اكتب تعبيرًا جبريًّا لكل من النموذجين أدناه :

أ



التعبير الجبري : –٢ س^{٢} – س + ٢

ب

التعبير الجبري : ٢ س^{٢} + ٣ س – ١

تدرّب (٢) :

حدد من التعابير الجبرية التالية ما يمثل حدودية وما لا يمثل ذلك .

١ ٤ س^{٥} + ٢ س^{٢} – ٦ س .... حدودية

٢ ٣ س^{٢} – $\sqrt{\text{س}}$ .... ليست حدودية

٣ ٥ س^{٢} – س ص + ص^{٢} + ٤ ص – ٧ .... حدودية

٤ ص^{٣} – ٣ س^{٢} + س .... حدودية

٥ $\frac{٣}{\text{س}}$ .... ليست حدودية

٦ ٣$^{\text{س}}$ + ٥ .... ليست حدودية

كثيرة الحدود (الحدوديات)	تسميات خاصة
س ، ٣ س^{٤} ، – ٥	وحيدة الحد
ل + ٢ ، ٦ س^{٢} – ٢ س ، م^{٢} + ١	ثنائية الحد (حدانية)
٣ + س + ٧ س^{٢} ، س^{٦} – ٥ س^{٢} + ٢ س^{٣}	ثلاثية الحد (حدودية ثلاثية)

جميع الحدوديات في الجدول السابق تسمى **حدوديات في متغير واحد (مقدار جبري)** ، بينما الحدوديات – س – ٢ ص ، ٥ س^{٢} – س ص + ص^{٢} + ٤ ص – ٩ تسمى **حدوديات في متغيرين** .

تدرّب (٣) :

حدد ما إذا كانت كل عبارة في الجدول كثيرة حدود أم لا ، وإذا كانت كذلك صنفها إلى (وحيدة حد – ثنائية حد – ثلاثية حد) ، ثم اذكر المتغيرات في الحدودية :

العبارة	هل هي كثيرة حدود ؟ ولماذا ؟	تصنيف الحدودية : وحيدة – ثنائية – ثلاثية	المتغير في الحدودية
$٧ س^{٣}$	نعم كثيرة حدود لأنَّها تتكون من حد واحد	وحيدة الحد	متغير واحد هو س
$٩ س^{٤} + ٤ ص^{٢}$	نعم كثيرة حدود لانها تتكون من حدين	ثنائية	متغيران وهما : س ، ص
$٦ ع^{-٢} - ٩ ن$	ليست كثيرة حدود	ليست حدودية لان الأس للمتغير سالب	ليست كثيرة حدود
$٦ س^{٥} + ٤^{س} - ٣$	ليست كثيرة حدود	ليست كثيرة حدود لأن المتغير أس	ليست كثيرة حدود
٧	نعم كثيرة حدود لأنها تتكون من حد واحد	وحيدة حد	لا يوجد متغير لذلك يسمى (حد مطلق)

ملاحظة :
$٥ س^{٢} ص^{٣}$
مجموع أسس المتغيرات
$= ٢ + ٣ = ٥$

درجة الحدودية وترتيبها :

- درجة كثيرة الحدود ذات متغير واحد هي قيمة أعلى (أس للمتغير) يظهر في أي حد
- درجة كثيرة الحدود ذات أكثر من متغير هي قيمة أعلى مجموع (لأسس المتغيرات) التي تظهر في أي حد .

تدرّب (٤) :

اكتب الحدود الجبرية لكثيرات الحدود التالية ، ثم اذكر أكبر أُس لكل حدودية وحدد درجة الحدودية لكل منها :

كثيرة الحدود	الحدود الجبرية	الحد	الأُس	أكبر أُس	درجة الحدودية
٢ س^{٢} + ٣	٢ س^{٢} ، ٣	٢ س^{٢}	٢	٢	الدرجة الثانية
		٣	صفر		
ص^{٤} + ٥ ص − ٧	ص^{٤} ، ٥ ص ، −٧	ص^{٤}	٤	٤	الدرجة الرابعة
		٥ ص	١		
		−٧	صفر		
ع^{٢} ن^{٣} + ع^{٣} + ١	ع^{٢} ن^{٣} ، ع^{٣} ، ١	ع^{٢} ن^{٣}	٣ + ٢ = ٥	٥	الدرجة الخامسة
		ع^{٣}	٣		
		١	صفر		
س ص ع − ٢ س ص^{٣} ع^{٤} + ٠,٥ س	س ص ع ، −٢ س ص^{٣} ع^{٤} ، ٠,٥ س	س ص ع	١+١+١=٣	٨	الدرجة الثامنة
		−٢ س ص^{٣} ع^{٤}	١+٣+٤=٨		
		٠,٥ س	١		

من الجدول نجد أنَّ الحدودية : ص^{٤} + ٥ ص − ٧ هي حدودية في متغير واحد ، من الدرجة الرابعة ومرتبة تنازليًا بحسب أكبر أس .

الحدود المتشابهة والحدود المتساوية .

	الحدود متشابهة	الحدود متساوية
التعريف	هي الحدود التي لها نفس المتغير مرفوعة لنفس الأس.	هي حدود متشابهة بمعاملات متساوية.
أمثلة	(١) ٤ س^{٢} ، $-\frac{١}{٢}$ س^{٢} ، π س^{٢} (٢) ٣ ص ، −٥ ص (٣) ل ع^{٢} ، − ٣ ل ع^{٢}	(١) ٣ س^{٢} ، ٣ س^{٢} (٢) $\frac{١}{٢}$ ص ، $\frac{١}{٢}$ ص (٣) ل ع^{٢} ، ع^{٢} ل

تدرّب (٥) :

حدد الحدود المتشابهة والمتساوية في ما يلي :

١ $\frac{١}{٣}$ ع^{٥} ص ، − ص ع^{٥} .... متشابهة

٢ ٤ ك^{٣} ، − ٣,٠ ك ، $\frac{١}{٦}$ ك^{٢} .... غير متشابهة

٣ ٧ س^{٤} ، ٢ س^{٤} ، − س^{٤} .... متشابهة

٤ س^{٢} ل ، س ل^{٢} .... غير متشابهة

٥ −٥ س^{٢} ص^{٣} ، −٥ ص^{٣} س^{٢} .... متساوية

٦ ٥,٠ س^{٢} ص ، $\frac{١}{٢}$ ص س^{٢} .... متساوية

ملاحظة :

يمكن كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب (تصاعدي − تنازلي) حسب درجتها ، ولكن عند ترتيب كثيرة الحدود بمتغير واحد تنازليًا حسب درجتها يسمى هذا **بالصورة القياسية** .

مثل : ٤ ع^{٣} − ٥ ع^{٢} + ٢ ع + ٧

تدرّب (٦) :

اكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة القياسية ، وحدد درجتها :

الحدودية	الصورة القياسية	درجة الحدودية
ص^{٢} − ٢ ص + ص^{٣}	ص^{٣} + ص^{٢} − ٢ ص	الدرجة الثالثة
س^{٤} + ٥ س − ٧ − س^{٢}	س^{٤} − س^{٢} + ٥ س − ٧	الدرجة الرابعة
٢ ع^{٢} − ٣ ع + ع^{٤} + ٨	ع^{٤} + ٢ ع^{٢} − ٣ ع + ٨	الدرجة الرابعة
− ٥,٠ + ٣,٥ ص^{٥} − ٤ ص^{٢} + ٠,٠٤ ص^{٣}	٣,٥ ص^{٥} + ٠,٠٤ ص^{٣} − ٤ ص^{٢} − ٠,٥	الدرجة الخامسة

تدرّب (٧) :

١ أوجد قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عندما س = ٣ ، ص = − ٢ :

أ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢ ص^{٢} + ٢٥

= $\frac{١}{٣}$ × ٣^{٣} + ٢ × (− ٢)^{٢} + ٢٥

= $\frac{١}{٣}$ × ٢٧ + ٢ × ٤ + ٢٥

= ٩ + ٨ + ٢٥ = ٤٢

ب ٣ ص^{٤} − ٢ س ص − ٥٠

= ٣ × (− ٢)^{٤} − ٢ × ٣ × (− ٢) − ٥٠

= ٣ × ١٦ − (−١٢) − ٥٠

= ٤٨ + ١٢ − ٥٠ = ١٠

٢ إذا كانت س = ٧ ، ص = ٧ ، ن = ٣
أي المقادير الآتية صحيحة بحيث يكون الناتج ١٤ ؟

(أ) س × (ص + ن) (ب) س × ص × ن

(ج) ن × ص − س (د) (ص + ن) ÷ س

تمــرَّنْ :

١ ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

٣ س^{٥} − $\frac{١}{س}$ + ٤	كثيرة حدود	(أ)	(ب) ●
$\sqrt{س}$ − ص^{س} + $\frac{٢}{٨}$ س	ليست كثيرة حدود	(أ) ●	(ب)
− $\frac{٣}{٥}$ س ص^{٣} ، − ٦,٠ ص^{٣} س	حدان جبريان متساويان	(أ) ●	(ب)

٢ صل من القائمة (أ) ما يناسبها من القائمة (ب) :

(أ) الحدودية	(ب) الدرجة
$\frac{١}{٢}$ ص − ع	الثالثة
ص^{٢}ع − $\frac{١}{٣}$ ص ع + ١	الرابعة
− س^{٢} − $\frac{٢}{٥}$ ص^{٣}س + س ص^{٢}	الأولى
٥ ل^{٥} + ل + ل^{٤} − ل^{٦}	السادسة
	الثانية

٣ رتب الحدود الجبرية التالية حسب ما هو موضح في الجدول التالي :

٦ س^{٢} ص ، $\frac{١}{٢}$ ص^{٣} ، − ص س^{٢} ، ٤ س ص^{٢} ، $\frac{٢}{٥}$ س^{٢} ص ، − ٧

حدود متشابهة	حدود غير متشابهة
٦ س^{٢}ص ، − ص س^{٢} ، $\frac{٢}{٥}$ س^{٢}ص	$\frac{١}{٢}$ ص^{٣} ، ٤ س ص^{٢} ، − ٧

٤ ضع الحدوديات التالية في الصورة القياسية ، ثم حدد درجة الحدودية :

أ ٦ س^{٥} + ٤ س^{٣} − ٥

٦ س^{٥} + ٤ س^{٣} − ٥

الدرجة الخامسة

ب − ٧ + ٤ ص^{٣} − ٥ ص^{٢} + ص^{٤}

ص^{٤} + ٤ ص^{٣} − ٥ ص^{٢} − ٧

الدرجة الرابعة

جـ − ٤ ع + ٦ − ٢ ع^{٣}

− ٢ ع^{٣} − ٤ ع + ٦

الدرجة الثالثة

د ٢ س − ٥ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$

− ٥ س^{٢} + ٢ س + $\frac{١}{٢}$

الدرجة الثانية

TIMSS 2019 ⑤ إذا كانت أ + ٣ ب = ٥ ، جـ = ٤ فما قيمة أ + ٣ (ب + جـ) ؟

أ + ٣ (ب + جـ) = أ + ٣ ب + ٣ جـ = (أ + ٣ ب) + ٣ جـ

= ٥ + ٣ × ٤ = ٥ + ١٢ = ١٧

⑥ أوجد قيمة كثيرات الحدود التالية :

أ) – ٤ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س + ٥ + ٢ س^{٣} ، عندما س = ٢

– ٤ × (٢)^{٢} + $\frac{١}{٢}$ × ٢ + ٥ + ٢ × (٢)^{٣} = – ٤ × ٤ + ١ + ٥ + ١٦

= – ١٦ + ٦ + ١٦ = ٦

ب) – س ص^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ ص^{٢} س^{٢} – ٩ ، عندما س = ٤ ، ص = ١

– ٤ × ١^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ × ١^{٢} × ٤^{٢} – ٩ = – ٤ + ١٢ – ٩ = – ١

⑦ كتبت أمينة لغزًا هو عبارة عن أرقام خزنتها ، وأرادت من ابنتها رغد معرفة رقم الخزنة وهو عبارة عن ٣ س^{٣} ص + $\frac{١}{٣}$ س^{٤} – ٥ ، عندما س = ٣ ، ص = ١ .
ساعد رغد على فتح الخزنة .

٣ × ٣^{٣} × ١ + $\frac{١}{٣}$ × ٣^{٤} – ٥ = ٣^{٤} + ٣^{٣} – ٥ = ٨١ + ٢٧ – ٥ = ١٠٣

TIMSS 2019 ⑧ إذا كانت س – ص = ٤ ، احسب قيمة (س – ص)^{٢} – ٢ (س – ص)

٤^{٢} – ٢ × ٤ = ١٦ – ٨ = ٨

TIMSS 2019 ⑨ لدى سامي ضعف عدد الكتب التي مع جاسم ، ومع حسن ستة كتب زيادة عن التي مع جاسم ، فإذا كان مع جاسم س كتاب ، فأي العبارات الرياضية الآتية تمثل عدد جميع الكتب التي مع الأولاد الثلاثة ؟

أ) ٤ س + ٦ ب) ٣ س + ٨ جـ) ٨ س + ٢ د) ٣ س + ٦

٩-٣ جمع كثيرات الحدود وطرحها
Adding and Subtracting Polynomials

العبارات والمفردات :
حدود متشابهة **Like Terms**
مبسط **Simplified**

سوف تتعلّم : جمع كثيرات الحدود وطرحها .

نشاط (١) :

سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أن :

سنستخدم هذه البطاقات لنمذجة الحدوديات كما في المثال التالي :

$٢ س^2 + (-س) + ٣$

$-س^2$ + ٣ س + −٢

تدرّب (١) :

أ اكتب كثيرة الحدود التي تمثل النموذج التالي :

$(-٢ س^2)$ + (−٢ س) + ٤

ب نمذج كثيرة الحدود $س^3 - ٢ س^2 + ٤ س - ١$ مستخدمًا البطاقات .

$س^2$ $س^2$ $س^2$ س س س س −١

جمع كثيرات الحدود

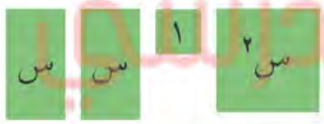
نشاط (٢) :

سوف نستخدم البطاقات الجبرية لنمذجة كثيرات الحدود ، بفرض أنَّ :

٢ س٢ + (– س) + ٣	+	– س٢ + ٣س + –٢

١ بالضم احذف الأزواج الصفرية :

٢ اكتب النمذجة التي حصلت عليها :



٣ رتب النمذجة التي حصلت عليها في الصورة القياسية :

٤ عبّر عن النمذجة بحدودية : س٢ + ٢س + ١

٥ لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة :

[٢ س٢ + (– س) + ٣] + [– س٢ + ٣ س + (– ٢)]

= (٢س٢ – س٢) + (–س + ٣س) + (٣ – ٢) = س٢ + ٢س + ١

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود المتشابهة معًا .

تذكّرْ أنّ :

أزواج صفرية :

مثال (١) :

أوجد ناتج جمع كثيرات الحدود التالية :

٢ س^{٣} + ٤ س − ٦ مع − ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − س + ٢

الحلّ :

الطريقة الرأسية :

اجمع الحدود المتشابهة

٢ س^{٣} + ٤ س − ٦

− ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − س + ٢

− ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣ س − ٤

الطريقة الأفقية :

(٢ س^{٣} + ٤ س − ٦) + (− ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − س + ٢)

= [٢ س^{٣} + (− ٥ س^{٣})] + ٢ س^{٢} + [٤ س + (− س)] + (− ٦ + ٢)

= − ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣ س + (− ٤) = − ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٣ س − ٤

تدرّب (٢) :

١ اجمع الحدوديات التالية :

أ س^{٢} + ٣ س^{٤} − ٧ س ، − س^{٢} − ١٠ س^{٤} ، ٥ س + ٢ س^{٢} − ٨ س^{٣}

(أكتب الحدودية بالصورة القياسية ، ثم أجمعها بالطريقة الرأسية) .

٣ س^{٤} + س^{٢} + − ٧ س

− ١٠ س^{٤} − س^{٢}

− ٨ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٥ س

− ٧ س^{٤} − ٨ س^{٣} + ٢ س^{٢} + − ٢ س

ب ٦ س^{٣} − ١ ، − ٢ س^{٢} − ٤ س + ٥ ، − س^{٣} − ٧ س^{٢}

٦ س^{٣} − ١

− ٢ س^{٢} − ٤ س + ٥

− س^{٣} − ٧ س^{٢}

٥ س^{٣} − ٩ س^{٢} − ٤ س + ٤

٢ ناتج : ٣ س^{٢} + ٢ س + ٢ س^{٢} + س

(أ) ٨ س (ب) ٨ س^{٢} (ج) ٥ س^{٢} + ٣ س (د) ٧ س^{٢} + س

طرح كثيرات الحدود

تدرّب (٣) :

أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

م	كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
١	٣ س^{٢} − ٥ س − ٢	− (٣ س^{٢} − ٥ س − ٢) = − ٣ س^{٢} + ٥ س + ٢
٢	٤ س^{٢} − ٩ س + س^{٥}	− (٤ س^{٢} − ٩ س + س^{٥}) = −٤ س^{٢} + ٩ س − س^{٥}
٣	− ٧ + ١٠ س^{٤} − ٦ س^{٣}	− (− ٧ + ١٠ س^{٤} − ٦ س^{٣}) = ٧ − ١٠ س^{٤} + ٦ س^{٣}

تذكر أنّ :

- المعكوس الجمعي للعدد ٣ هو − ٣
- المعكوس الجمعي لـ س هو − س
- المعكوس الجمعي لـ −٣ س^{٥} هو ٣ س^{٥}
- أ − ب = أ + (− ب)

لطرح كثيرات الحدود نضيف المعكوس الجمعي للمطروح .

مثال (٢) :

أوجد ناتج ما يلي :

(٦ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤) − (س^{٣} − ٥ س^{٢} − ٣)

الحلّ :

الطريقة الأفقية :

- نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية :

− (س^{٣} − ٥ س^{٢} − ٣) = − س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

- نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية :

نرتب الحدود المتشابهة ثم نجمعها .

(٦ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤) + (− س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣)

= (٦ س^{٣} + (− س^{٣})) + (− ٢ س^{٢} + ٥ س^{٢}) + (٤ + ٣)

= (٦ − ١) س^{٣} + (− ٢ + ٥) س^{٢} + ٧ = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧

الطريقة الرأسية :

- نكتب المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود الثانية :

− (س^{٣} − ٥ س^{٢} − ٣) = − س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

- نجمع الحدودية الأولى ومعكوس الحدودية الثانية :

٦ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤

− س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣

―――――――――

٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧

نرتب الحدود تنازليًا (أو تصاعديًا) نضع الحدود المتشابهة أسفل بعض رأسيًا .

نجمع الحدود المتشابهة .

تدرّب (٤) :

أ اطرح ٣ ص^{٤} − ٢ ص^{٣} − ٥ ص من ١٢ ص^{٣} − ص^{٤} + ٢ ص^{٢}

المعكوس الجمعي (−٣ص^{٤} + ٢ص^{٣} + ٥ص)

− ص^{٤} + ١٢ ص^{٣} + ٢ ص^{٢}

−٣ص^{٤} + ٢ ص^{٣} + ... +٥ص

−٤ص^{٤} + ١٤ص^{٣} + ٢ص^{٢} + ٥ص

ب من −٢س^{٢} − س + ١ اِطرح −س^{٢} + ٣س − ٢

المعكوس الجمعي (س^{٢} − ٣س + ٢)

= (−٢س^{٢} − س + ١) − (−س^{٢} + ٣س − ٢)

= (−٢س^{٢} − س + ١) + (س^{٢} − ٣س + ٢)

= (−٢س^{٢} + س^{٢}) + (−س − ٣س) + (١ + ٢) = −س^{٢} − ٤س + ٣

تمــرَّنْ :

١ اجمع كثيرات الحدود التالية :

أ ٢ س^{٣} + ٥ س − ٢ ، −٣ س^{٣} − ٢ س + ١٠

٢س^{٣} + ٥س − ٢

\+ −٣س^{٣} − ٢س + ١٠

−س^{٣} + ٣س + ٨

ب −٤ س^{٥} + ٢ س^{٣} + ٦ ، −س^{٣} + ٤ س^{٥} − ٧

−٤س^{٥} + ٢س^{٣} + ٦

⊕ +٤س^{٥} − س^{٣} − ٧

س^{٣} − ١

جـ −س^{٣} + ٦ س − ٥ ، ٧ س − س^{٢} − ٣ ، س^{٢} + ٨

−س^{٣} +٦س −٥

−س^{٢} + ٧س − ٣

س^{٢} + ٨

−س^{٣} + ١٣س

الناتج −س^{٣} + ١٣س

د ٤ س − ٢ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س^{٣} ، ٣ س^{٤} + ٥ س^{٢} − س^{٣} ، س − $\frac{١}{٤}$

$\frac{١}{٢}$س^{٣} − ٢س^{٢} + ٤س

٣س^{٤} − س^{٣} + ٥س^{٢}

⊕ س − $\frac{١}{٤}$

٣س^{٤} − $\frac{١}{٢}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٥س − $\frac{١}{٤}$

٢ اكتب المعكوس الجمعي لكثيرات الحدود التالية :

كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
$\frac{١}{٢}$ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٢	− ($\frac{١}{٢}$ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٢) = − $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٢
− ٣,٠ س^{٥} − س^{٤} + $\frac{٢}{٣}$	− (− ٣,٠ س^{٥} − س^{٤} + $\frac{٢}{٣}$) = ٣,٠ س^{٥} + س^{٤} − $\frac{٢}{٣}$
− س^{٣} − ٥ س + ١	− (− س^{٣} − ٥ س + ١) = س^{٣} + ٥ س − ١
٧ + ٤ س^{٢} − ٦ س + س^{٢}	− (٧ + ٤ س^{٢} − ٦ س + س^{٤}) = − ٧ − ٤ س^{٢} + ٦ س − س^{٤}

٣ أوجد ناتج ما يلي :

أ ٣ س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٧ س − (٢ س^{٣} − س^{٤} + ٥ س)

معكوس

− ٢ س^{٣} + س^{٤} − ٥ س

٣ س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٧ س

س^{٤} − ٢ س^{٣} − ٥ س

٤ س^{٤} − ٤ س^{٣} + ٢ س

ب ٦ س^{٢} − س + ٥ − (١٠ س^{٢} − س − ١٥)

معكوس

− ١٠ س^{٢} + س + ١٥

٦ س^{٢} − س + ٥

− ١٠ س^{٢} + س + ١٥

− ٤ س^{٢} + ٢٠

٤ اطرح :

أ ٥ س^{٢} + ٦ س^{٤} − ١ من ٤ س^{٤} − ١٤ س^{٢} + س

معكوس

− ٥ س^{٢} − ٦ س^{٤} − ١

٤ س^{٤} − ١٤ س^{٢} + س

− ٦ س^{٤} − ٥ س^{٢} + ١

− ٢ س^{٤} − ١٩ س^{٢} + س + ١

ب ٣ س − ٩ + س^{٢} − ٤ س^{٣} من ٢ س + ٩ س^{٣} − س^{٢} + ٩

معكوس

− ٢ س − ٩ س^{٣} + س^{٢} − ٩

− ٤ س^{٣} + س^{٢} + ٣ س − ٩

− ٩ س^{٣} + س^{٢} − ٢ س − ٩

− ١٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + س − ١٨

ضرب كثيرات الحدود
Multiplying Polynomials

سوف تتعلّم: ضرب كثيرات الحدود .

نشاط (١) :

أ أراد أحمد أن يشتري سجادة ليضعها في صالة المنزل ، ففكر بعدة أبعاد للسجادة وإيجاد مساحتها كما في الجدول .

أكمِل الجدول التالي :

الطول	العرض	الطول × العرض	مساحة الشكل
س	٢	س × ٢	٢ س
٢ س	س	٢ س × س	٢ $س^{٢}$
٦ س	٢ س	٦ س × ٢ س	١٢ $س^{٢}$

ملاحظة :
ضرب قوى لأساسات متشابهة :
عند ضرب قوى لأساسات متشابهة نجمع الأسس .
$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
حيث أ ≠ ٠ ، م ، ن ∈ ص

ب باب على شكل مستطيل طوله س قدم ، وعرضه ص قدم ، وفي منتصفه نافذة زجاجية مستطيلة الشكل ، طولها ٣ أقدام وعرضها قدمان ، أي العبارات التالية يبين المساحة المدهونة من الباب بوحدة القدم المربعة ؟

(أ) س + ص − ٦ (ب) س ص + ٦

(ج) س ص − ٦ (د) س + ص + ٦

تذكَّرْ أنّ :
الخاصية التوزيعية للضرب على الجمع
أ × (س + ص) = (أ × س) + (أ × ص)

تدرّب (١) :

أوجد ناتج ما يلي :

١ ٥ $س^{٢}$ × ٧ $س^{٣}$ = (٥ × ٧) × ($س^{٢}$ × $س^{٣}$) = ٣٥ $س^{٥}$

٢ − ٣ $س^{٤}$ × − ٥ $س^{٥}$ = (−٣ × −٥) × ($س^{٤}$ × $س^{٥}$) = ١٥ $س^{٩}$

يمكنك أن تضرب وحيدة حدّ في وحيدة حدّ ، قد تساعد خاصية التوزيع في أن تضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود .

تدرّب (٢) :

أكمل:

$$(٢ س^٢) \times (٨ س^٤ + ٣ س)$$

$$= (٢ س^٢ \times ٨ س^٤) + (٢ س^٢ \times ٣ س) = ١٦ س^٦ + ١٦ س^٦ + ٦ س^٣$$

والآن ، يمكنك أيضًا إيجاد ناتج ضرب كثيرة حدود في أخرى حيث توجد طريقتان لإجراء عملية الضرب : الطريقة الرأسية والطريقة الأفقية . يمكنك استخدام أي منهما في الحلّ .

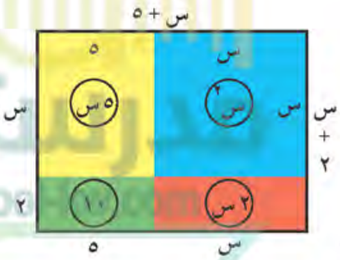
تدرّب (٣) :

بسط المقدار التالي :

$$٤ (٢ + س) - ٣ س + ٥ (س - ١)$$

$$٨ + ٤ س - ٣ س + ٥ س - ٥ = ٦ س + ٣$$

مثال (١) :



في الشكل المقابل مستطيل بعداه (س + ٥) ، (س + ٢) أوجد مساحة المستطيل :

الحلّ:

نقسم المستطيل إلى أربعة أجزاء كما في الشكل المقابل.

مساحة الشكل = الطول × العرض

- **الطريقة الأولى : الأفقية**

$$(س + ٥) (س + ٢)$$

$$= س (س + ٢) + ٥ (س + ٢)$$

$$= (س \times س) + (س \times ٢) + (٥ \times س) + (٥ \times ٢)$$

$$= س^٢ + ٢ س + ٥ س + ١٠$$

$$= س^٢ + ٧ س + ١٠$$

- **الطريقة الثانية : الرأسية**

$$\begin{array}{r} س + ٥ \\ \times \quad س + ٢ \\ \hline س^٢ + ٥ س \\ + \quad ٢ س + ١٠ \\ \hline س^٢ + ٧ س + ١٠ \end{array}$$

تذكَّرْ أنّ :
مربع س = $س^٢$
ضعف س = ٢ س

تدرّب (٤) :

أوجد ناتج (س + ٤) (س + ٣) = س (س + ٣) + ٤ (س + ٣)

$$= س^٢ + ٣ س + ٤ س + ١٢$$

$$= س^٢ + ٧ س + ١٢$$

تدرّب (٥) :

أكمل لإيجاد ناتج ما يلي :

أ (ص + ٥) (ص − ٥)

= ص (ص − ٥) + ٥ (ص − ٥)

= ص^{٢} − ٥ص + ٥ص − ٢٥

= ص^{٢} − ٢٥

ب ٢ س^{٢} − ٥ س + ٣

× س − ٤

٢ س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٣ س

+ − ٨ س^{٢} + ٢٠ س − ١٢

٢س^{٣} − ١٣ س^{٢} + ٢٣ س − ١٢

×	٢ س^{٢}	− ٥ س	+ ٣
س	٢ س^{٣}	− ٥ س^{٢}	+ ٣ س
− ٤	− ٨ س^{٢}	+ ٢٠ س	− ١٢

= ٢ س^{٣} − $\boxed{\text{١٣ س}^{٢}}$ + $\boxed{\text{٢٣ س}}$ − ١٢

مثال (٢) :

أوجد مربع (س + ٣) = (س + ٣)^{٢}

الحلّ:

(س + ٣) (س + ٣)

= س^{٢} + ٣ س + ٣ س + ٩

= س^{٢} + ٦ س + ٩

لاحظ في مثال (٢) السابق:

(س + ٣)^{٢} هي مربع الحدانية (س + ٣) حيث :

س هي الحد الأول ، ٣ هي الحد الثاني ،

س^{٢} هي مربع الحد الأول ،

٩ هي مربع الحد الثاني ،

٦ س هي ضعف الحد الأول × الحد الثاني .

مربع (س ± ص) = (س ± ص)^{٢} **الصورة القياسية**

= س^{٢} ± ٢ س ص + ص^{٢} **حدودية ثلاثية على صورة مربع كامل**

= مربع الحد الأول ± ضعف الحد الأول × الحد الثاني

\+ مربع الحد الثاني

تدرّب (٦) :

أ أوجد (ص − ٧)^{٢} :

= [مربع الحد الأول] − [ضعف الحد الأول × الحد الثاني] + [مربع الحد الثاني]

= ص^{٢} − ٢ × ٧ × ص + ٧^{٢}

= ص^{٢} − ١٤ص + ٤٩

ب (أ^{٢} + ٥ ب)^{٢}

= [مربع الحد الأول] + [ضعف الحد الأول × الحد الثاني] + [مربع الحد الثاني]

= (أ^{٢})^{٢} + ٢(أ^{٢} × ٥ب) + (٥ب)^{٢}

= أ^{٤} + ١٠أ^{٢}ب + ٢٥ب^{٢}

فكِّر وناقِش

ما التشابه والاختلاف بين ناتج (س + ٥)^{٢} و (س − ٥)^{٢} ؟

مثال (٣) :

شبه مكعب أبعاده هي : (س + ٥) ، (س − ٢) ، (س) وحدة طول .
أوجد حجمه .

الحلّ :

حجم شبه المكعب = حاصل ضرب أبعاده

= (س + ٥) × (س − ٢) × (س)

= [س × (س − ٢) + ٥ × (س − ٢)] × س

= [س^{٢} − ٢س + ٥ س − ١٠] × س

= [س^{٢} + ٣ س − ١٠] × س

= س^{٣} + ٣ س^{٢} − ١٠ س وحدة مكعبة

تمــرَّنْ :

TIMSS 2019 ١ مساحة المستطيل المجاور هي :

أ) س^{٢} + ٢   ب) س^{٢} + ٢ س

جـ) ٢ س + ٢   د) ٤ س + ٤

٢ أوجد ناتج كلّ مما يلي :

أ) ٢س × ٣ س^{٢} =

(٢ × ٣) × (س × س^{٢})

٦ س^{٣}

ب) $\frac{١}{٢}$ س × ($\frac{٢}{٣}$ س^{٢} − ٤ س + $\frac{٣}{٢}$) =

$\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ س × ٤ س + $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س

جـ) (٣ ص^{٢} + ص − ٢) × (−٢ ص) =

(٣ص^{٢} × −٢ص) + (ص × −٢ص) + (−٢ × −٢ص)

−٦ص^{٣} − ٢ص^{٢} + ٤ص

د) (٢ س + ٣ ع)^{٢}

٤س^{٢} + ١٢ س ع + ٩ ع^{٢}

هـ) (س + ٧) (س − ٥) =

س^{٢} − ٥ س + ٧ س − ٣٥

س^{٢} + ٢ س − ٣٥

و) (أ − ب) (أ + ب) =

أ − ب

× أ + ب

أ^{٢} − أ ب

\+ أ ب − ب^{٢}

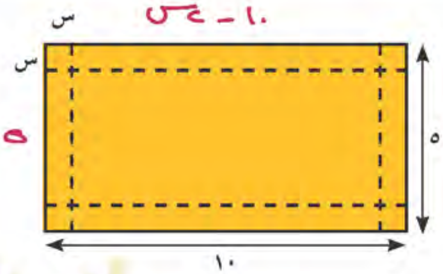
أ^{٢} − ب^{٢}

٣ أوجد مربع كل حدانية في ما يلي :

أ $(س - ٤)^٢$ = س² − ٨س + ١٦ ب $(٣م - ٢جـ^٢)^٢$ = ٩م² − ١٢م جـ² + ٤جـ²

---

٤ أرادت شيماء صنع علبة من دون غطاء مستخدمة قطعة من الورق المقوى بعداها ١٠ وحدة طول ، ٥ وحدة طول ، وذلك بنزع مربع طول ضلعه س وحدة طول من كل زاوية من زوايا القطعة . ما حجم علبة شيماء ؟



الطول = ١٠ − ٢س ، العرض = ٥ − ٢س ، الارتفاع = س

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع = (١٠ − ٢س)(٥ − ٢س)(س)

= ٤س³ − ٣٠س² + ٥٠س وحدة مكعبة

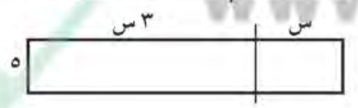
TIMSS 2019 ٥ أي مما يلي يمثل التعبير ٢ س + ٣ س ؟

أ طول القطعة المستقيمة

ب طول القطعة المستقيمة

جـ مساحة الشكل

د مساحة الشكل



TIMSS 2019 ٦ إذا كانت $س^٢ = ١٦$ ، $ص^٢ = ٤$ ، فإنّ أكبر قيمة للمقدار $(س - ص)^٢$ =

أ ٤ ب ١٢ جـ ١٦ د ٣٦

TIMSS 2019 ٧ أي مما يلي يساوي ٢ (س + ع) − (٢ س − ع) ؟

أ ٣ ع ب ع جـ ٤ س + ٣ ع د ٤ س + ٢ ع

٩-٥ قسمة كثيرة حدود على حد جبري
Dividing a Polynomial by a Monomial

سوف تتعلّم : قسمة حد جبري على حد جبري آخر ، قسمة كثيرة حدود على حد جبري

العبارات والمفردات :
قسمة حد جبري
Dividing a Monomial
قسمة كثيرة حدود
Dividing a Polynomial

نشاط (١) :

باستخدام قسمة الأعداد النسبية وما تعلمته من ضرب وقسمة الأسس ، أكمل الجدول .

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الأول ÷ الحد الثاني (الحد الثاني ≠ ٠)
١٥	٥	٣
$س^٤$	$س^٢$	$س^٢$
$س^٥$	٦	$س^٥$ ÷ ٦
$س^٢$	$ص^٣$	$س^٢$ ÷ $ص^٣$
١٥ $س^٤$	٣ $س^٢$	٥ $س^٢$
٤ $س^٢$	٢ $ص^٣$	$\frac{٢ س^٢}{ص^٣}$

معلومات مفيدة :
تُستخدَم قسمة كثيرات الحدود عند الكيميائيين في صناعة الأدوية .

تدرّب (١) :

أ أوجد ناتج قسمة ٨ $س^٤ ص^٣$ على ٤ $ص^٢ س^٣$.

$\frac{٨ س^٤ ص^٣}{٤ ص^٢ س^٣}$ = ٢ س ص

ملاحظة :
المقام في جميع الحلول لا يساوي صفرًا.

ب أوجد ناتج قسمة ٥ $ع^٢ ل^٤$ على ١٥ $ع^٦$ ل .

$\frac{٥ ع^٢ ل^٤}{١٥ ع^٦ ل}$ = $\frac{ل^٣}{٣ ع^٤}$

تذكَّرْ أنّ :
$\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$
حيث أ ≠ ٠

إذا أردنا أن نقسم كثيرة حدود على حد جبري ، نقسم كل حد من كثيرة الحدود على هذا الحد الجبري .

مثال (١) : اقسم (٦ $س^٤$ + ٣$س^٣$ − ١٢$س^٢$) على ٣ $س^٢$.

الحلّ :

$\frac{٦ س^٤ + ٣ س^٣ - ١٢ س^٢}{٣ س^٢} = \frac{٦ س^٤}{٣ س^٢} + \frac{٣ س^٣}{٣ س^٢} - \frac{١٢ س^٢}{٣ س^٢}$ اقسم كل حدّ على المقسوم عليه

= ٢$س^٢$ + س − ٤ بسّط

تدرّب (٢) :

أقسم ($٦\,\text{س}^{٥} + ٨\,\text{س}^{٤} - ٢\,\text{س}^{٢}$) على $\text{س}^{٢}$

$$\frac{٦\,\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٢}} + \frac{٨\,\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٢}} - \frac{٢\,\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = ٦\,\text{س}^{٣} + ٨\,\text{س}^{٢} - ٢$$

تمــرَّنْ :

١ اختصر ما يلي :

أ) $\frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{٢}$

ب) $\frac{٦\,\text{س}^{٤}}{٢\,\text{س}^{٢}} = ٣\,\text{س}^{٢}$

جـ) $-\frac{٨\,\text{س}^{٣}}{٨\,\text{س}^{٣}} = -١$

د) $\frac{١٠\,\text{س}^{٢}}{٢٥\,\text{س}^{٥}} = \frac{٢}{٥\,\text{س}^{٣}}$

٢ اقسم : $٦\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣} + ١٢\,\text{س}^{٤}\text{ص}^{٤} - ١٨\,\text{س}^{٥}\text{ص}^{٢}$ على $٦\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}$

$$= \frac{٦\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}}{٦\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}} + \frac{١٢\,\text{س}^{٤}\text{ص}^{٤}}{٦\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}} - \frac{١٨\,\text{س}^{٥}\text{ص}^{٢}}{٦\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}}$$

=

$$= \text{ص} + ٢\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} - ٣\,\text{س}^{٣}$$

٣ أوجد ناتج $\frac{٥\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٧}\text{ص}^{٤} - ٥}{١٥\,\text{س}}$

$$= \frac{٥\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}}{١٥\,\text{س}} + \frac{٣\,\text{س}^{٧}\text{ص}^{٤}}{١٥\,\text{س}} - \frac{٥}{١٥\,\text{س}} = \frac{\text{س}\,\text{ص}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٦}\text{ص}^{٤}}{٥} - \frac{١}{٣\,\text{س}}$$

٤ مساحة مستطيل هي ($٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}$) مترًا مربّعًا ، عرض هذا المستطيل س مترًا ، أوجد طول هذا المستطيل .

$$\text{الطول} = \frac{\text{المساحة}}{\text{العرض}} = \frac{٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}}{\text{س}} = \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{\text{س}} - \frac{٢\,\text{س}}{\text{س}} = ٣\,\text{س} - ٢ \text{ متر}$$

٩-٦ مراجعة الوحدة التاسعة
Revision Unit Nine

١ اختصر :

أ $(-٢ أ ب)(أ^{٢} ب^{٣})^{٤} = -٢ أ^{٩} ب^{١٣}$

ب $\frac{س^{٩}}{س^{٢}} = س^{٩-٢} = س^{٧}$

ج $\frac{-٢٤ ع^{٢} ل^{٢}}{٦ ع^{٣} ص} = \frac{-٤ ل^{٢}}{ع ص}$

د $\left(\frac{-٢ أ^{٢}}{٣ ب}\right)^{٣} = \frac{-٨ أ^{٦}}{٢٧ ب^{٣}}$

٢ احسب قيمة كل من كثيرات الحدود التالية عندما س = − ٢

أ $٢ س^{٢} - ٣ س + ٥$

$= ٢ \times (-٢)^{٢} - ٣ \times -٢ + ٥$

$= ٢ \times ٤ + ٦ + ٥$

$= ١٩$

ب $٣ س^{٣} - ٢ س + ٧$

$= ٣ \times (-٢)^{٣} - ٢ \times (-٢) + ٧$

$= -٢٤ + ٤ + ٧$

$= -١٣$

ج $\frac{١}{١٦} س^{٤} + \frac{٣}{٤} س^{٢}$

$= \frac{١}{١٦} \times (-٢)^{٤} + \frac{٣}{٤} \times (-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{١٦} \times ١٦ + \frac{٣}{٤} \times ٤$

$= ١ + ٣ = ٤$

٣ اجمع كثيرات الحدود التالية :

أ $س^{٢} + ٦ س - ٤$ ، $٥ س - س^{٢} - ٤$

$س^{٢} + ٦ س - ٤$

$+ \quad -س^{٢} + ٥ س - ٤$

$١١ س - ٨$

ب $٢ ص^{٣} - ٤ ص^{٢} + ٩$ ، $ص^{٣} + ٣ ص^{٢} - ٩$ ، $٥ ص^{٣} - ص^{٢}$

$(٢ص^{٣} + ص^{٣} + ٥ص^{٣}) + (-٤ص^{٢} + ٣ص^{٢} - ص^{٢}) + (٩ - ٩)$

$= ٨ص^{٣} - ٢ص^{٢}$

٤ اطرح $٢ ص^{٤} - ٣ ص^{٣} + ٢$ من $٥ ص^{٣} + ٦ ص^{٤} - ١$

معكوس $٢ص^{٤} - ٣ص^{٣} + ٢ = -٢ص^{٤} + ٣ص^{٣} - ٢$

$٦ص^{٤} + ٥ص^{٣} - ١$

$+ \quad -٢ص^{٤} + ٣ص^{٣} - ٢$

$٤ص^{٤} + ٨ص^{٣} - ٣$

٥ من $٤\,\text{هـ}\text{م}^{٢} + ٣\,\text{هـ}^{٣}\text{م} + ٧$ اطرح $\text{هـ}^{٣}\text{م} + \text{هـ}\text{م}^{٢} + ٧$

$٣\,\text{هـ}^{٣}\text{م} + ٤\,\text{هـ}\text{م}^{٢} + ٧$

$\oplus\; -\text{هـ}^{٣}\text{م} - \text{هـ}\text{م}^{٢} - ٧$

$٢\,\text{هـ}^{٣}\text{م} + ٣\,\text{هـ}\text{م}^{٢}$

٦ أوجد ناتج :

أ $(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٩) = \text{س}^{٢} - ٩\text{س} + ٤\text{س} - ٣٦ = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٣٦$

ب مربع $(\text{س}^{٢} + ١) = (\text{س}^{٢} + ١)^{٢} = \text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١$

جـ $(٢\text{أ} + ٣)(٥\text{أ}^{٢} - ٤\text{أ} - ٧) = ١٠\text{أ}^{٣} - ٨\text{أ}^{٢} - ١٤\text{أ} + ١٥\text{أ}^{٢} - ١٢\text{أ} - ٢١$

$= ١٠\text{أ}^{٣} + ٧\text{أ}^{٢} - ٢٦\text{أ} - ٢١$

٧ اقسم : $٤\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢} + ١٦\text{س}^{٥}\text{ص}^{٦} + ٣٦\text{س}^{٣}\text{ص}^{٤}$ على $٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}$

$\frac{٤\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢} + ١٦\text{س}^{٥}\text{ص}^{٦} + ٣٦\text{س}^{٣}\text{ص}^{٤}}{٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}} = \frac{٤\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢}}{٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}} + \frac{١٦\text{س}^{٥}\text{ص}^{٦}}{٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}} + \frac{٣٦\text{س}^{٣}\text{ص}^{٤}}{٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}}$

$= \frac{\text{س}}{\text{ص}} + ٤\text{س}^{٣}\text{ص}^{٣} + ٩\text{س}\text{ص}$

٨ اقسم : $١٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣} - ١٢\text{س}^{٣}\text{ص} + ٩\text{س}^{٤}\text{ص}^{٤}$ على $٦\text{س}^{٢}\text{ص}$

$\frac{١٥\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}}{٦\text{س}^{٢}\text{ص}} - \frac{١٢\text{س}^{٣}\text{ص}}{٦\text{س}^{٢}\text{ص}} + \frac{٩\text{س}^{٤}\text{ص}^{٤}}{٦\text{س}^{٢}\text{ص}} = \frac{٥}{٢}\text{ص}^{٢} - ٢\text{س} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣}$

٩ منطقة مستطيلة مساحتها $(٢\text{س}^{٣} + ١٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س})$ وحدة مربّعة وعرضها ٢س وحدة طول أوجد طولها .

الطول = $\frac{\text{المساحة}}{\text{العرض}} = \frac{٢\text{س}^{٣} + ١٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س}}{٢\text{س}} = \frac{٢\text{س}^{٣}}{٢\text{س}} + \frac{١٢\text{س}^{٢}}{٢\text{س}} - \frac{٤\text{س}}{٢\text{س}}$

$= \text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٢$ متر

اِختبار الوحدة التاسعة

أوّلًا : في البنود (١ – ٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ ناتج $\left(\frac{س^{٥}}{٢ س^{٥}}\right)^{٠} = ١$ ، حيث س $\neq$ ٠	أ	ب
٢ $٣ س^{٣} - \frac{١}{س} + ٤$ كثيرة حدود	أ	ب
٣ ناتج جمع $٣ س^{٢}$ ، $٥ س^{٣}$ هو $٨ س^{٥}$	أ	ب
٤ $- ٢٤ ع^{٢} ن^{٦}$ ، $\pi ن^{-٦} ع^{٢}$ ، $\frac{٣}{٥} ع^{-٢} ن^{٦}$ حدود مُتشابهة	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود $- ٢ س^{٢} + ٣ س - ٤$ هو :

(أ) $- ٢ س^{٢} - ٣ س - ٤$ (ب) $- ٢ س^{٢} - ٣ س + ٤$

(ج) $٢ س^{٢} - ٣ س + ٤$ (د) $٢ س^{٢} + ٣ س - ٤$

---

٦ ٣ س (٢ س – ٥) =

(أ) $٦ س^{٢} - ٥$ (ب) ٦ س – ١٥ (ج) $٦ س^{٢} + ٥$ (د) $٦ س^{٢} - ١٥ س$

---

٧ $\frac{٦ س^{٣} - ٣ س}{٣ س} =$

(أ) $٢ س^{٢}$ (ب) $٢ س^{٢} - س$ (ج) $٢ س^{٢} - ١$ (د) $\frac{١}{٢ س^{٢}}$

٨ ناتج جمع ٤ س^{٣} + ٤ س^{٢} − ٢ س − ٢ ، ٢ س^{٢} + ٣ س^{٣} − ٤ س − ١ =

(أ) ٧ س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢

(ب) ٧ س^{٣} + ٦ س^{٢} − ٦ س − ٣

(جـ) ٤ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢

(د) ٦ س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٦ س − ٣

---

٩ (٣ س + ٤ ص) − (٣ س − ٤ ص) =

(أ) ٦ س − ٨ ص

(ب) ٦ س + ٨ ص

(جـ) ٨ ص

(د) ٦ س

TIMSS 2019

١٠ التعبير الجبري المكافئ للتعبير ٢ + ٥ ن هو :

(أ) ٢ + ٢ ن + ٣

(ب) ن + (١ + ٢ ن)

(جـ) ٧ ن

(د) $\frac{\text{١٥ ن + ٦}}{\text{٣}}$

الوحدة العاشرة

تحليل مقادير جبرية
Factorising Algebraic Expressions

العلم والحياة
Education and Life

مشروع الوحدة :
(مزرعتي)

العلم هو الفكر الناتج عن دراسة سلوك وشكل وطبيعة الأشياء مما يؤدي إلى الحصول على معرفة عنها . فللعلم أهمية كبيرة في حياة الإنسان حيث إنَّه ساهم في تطور العديد من الأشياء وقدّم الكثير من الاختراعات التي أدت إلى تطور البشرية وزيادة ازدهارها .
مثال على ذلك ، التطور والازدهار الذي شهده مجال الزراعة .

خطة العمل :

- إيجاد (المساحة المتبقية) من مساحة معطاة .

خطوات تنفيذ المشروع :

تستعين كل مجموعة بمعلم الصف للقيام بما يلي :

- تحدد الشكل الهندسي لكل من (الأرض الزراعية - أرض المنزل) في الشكل المقابل .
- توجد المجموعة مساحة كل من :
  (أ) الأرض الزراعية (ب) أرض المنزل .
- توجد مساحة الأرض المُتبقية بعد بناء المنزل عليها بالاستعانة بالتحليل.
- توجد مساحة الأرض المُتبقية عندما ص = ٢٥ متر ، س = ٢٠ مترًا .

علاقات وتواصل :

- مناقشة المجموعات خطوات إعداد المشروع .

عرض العمل :

- كل مجموعة تعرض حلها ثم تناقش المجموعات الحلول وتصحح الأخطاء .

مخطَّط تنظيمي للوحدة العاشرة

- تحليل المقادير الجبرية
  - ع . م . أ
    - تحليل
      - بإخراج العامل المشترك الأكبر
      - بالفرق بين مربعين
  - حل المعادلات والمتباينات في متغير واحد
    - المعادلات
      - حل مُعادلات من الدرجة الأولى
      - حل مُعادلات من الدرجة الثانية
    - المتباينات
      - حل مُتباينة من الدرجة الأولى

١٠-١ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)
Greatest Common Factor (GCF)

سوف تتعلّم : إيجاد (ع . م . أ) لحدين أو أكثر - كثيرات حدود .

نشاط :

يمكننا إيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين ١٨ ، ٣٠ بطريقتين . أكمل ما يلي :

الطريقة الأولى : (عوامل العدد)

عوامل ١٨ هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨

عوامل ٣٠ هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٣٠

العوامل المشتركة بينهما هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦

فإنَّ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين ١٨ ، ٣٠ هو ٦

الطريقة الثانية : (التحليل بالعوامل الأولية)

١٨ = $\boxed{٢}$ × ٣ × ٣

٣٠ = $\boxed{٢}$ × ٣ × ٥

فإنَّ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للعددين ١٨ ، ٣٠ هو ٢ × ٣ = ٦

وظف ما سبق في إيجاد (ع . م . أ) للحدود الجبرية في الجدول التالي :

الحدود الجبرية	عوامل الحدود الجبرية	ع . م . أ للحدود
س ، $س^٤$	س = $\boxed{س}$ $س^٤$ = $\boxed{س}$ × س × س × س	س
٢ $ص^٣$ ، $ص^٥$	٢ $ص^٣$ = ٢ × ص × ص × ص $ص^٥$ = ص × ص × ص × ص × ص	$ص^٣$
٢ $ن^٢$ ، ٦ $ن^٣$ ، ٤ن	٢ $ن^٢$ = ٢ × ن × ن ٦ $ن^٣$ = ٢ × ٣ × ن × ن × ن ٤ن = ٢ × ٢ × ن	٢ن

العبارات والمفردات :

عامل مشترك
Common Factor

العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)
Greatest Common Factor (GCF)

معلومات مفيدة :

يستخدم الرسامون التحليل إلى (ع . م . أ) في لوحاتهم الفنية لأهميتها في دقة الرسومات باللوحة كي تكون أكثر حرفية وجمالاً .

تذكَّرْ أنَّ :

- الأعداد الأولية هي : الأعداد التي لها عاملان فقط هما الواحد والعدد نفسه .
- (ع . م . أ) لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملاً مشتركًا لعددين أو أكثر .
- العوامل الأولية للعدد ٦ هي : ٢ ، ٣ .

تدرّب (١) :

أ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للحدين ٨ ، ١٢ س .

نحلل الحدين إلى عواملهما الأولية .

٨ = $\boxed{٢}$ × $\boxed{٢}$ × ٢ = ٢^{٣}

١٢ س = $\boxed{٢}$ × $\boxed{٢}$ × ٣ × س = ٢^{٢} × ٣ × س

فيكون (ع . م . أ) = ٢ × ٢ = ٢^{٢} = ٤

∴ (ع . م . أ) للحدين ٨ ، ١٢ س هو ٤

ب عيّن (ع . م . أ) للحدين ٤ س^{٥} ، ١٢ س^{٢} :

٤ س^{٥} = $\boxed{٢}$ × $\boxed{٢}$ × $\boxed{س}$ × $\boxed{س}$ × س × س × س

١٢ س^{٢} = $\boxed{٢}$ × $\boxed{٢}$ × ٣ × $\boxed{س}$ × $\boxed{س}$

∴ ع . م . أ = ٢ × ٢ × س × س = ٢^{٢} س^{٢} = ٤ س^{٢}

جـ عيّن (ع . م . أ) للحدود ١٤ س ص^{٤} ، ٢١ ص^{٢} ع ، ٧ س ص^{٣} ع^{٢} :

١٤ س ص^{٤} = ٢ × $\boxed{٧}$ × س × $\boxed{ص}$ × $\boxed{ص}$ × ص × ص

٢١ ص^{٢} ع = ٣ × $\boxed{٧}$ × $\boxed{ص}$ × $\boxed{ص}$ × ع

٧ س ص^{٣} ع^{٢} = $\boxed{٧}$ × س × $\boxed{ص}$ × $\boxed{ص}$ × ص × ع × ع

∴ ع . م . أ = ٧ ص^{٢}

> **ملاحظة :**
>
> لإيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) لمجموعة من الحدود الجبرية :
>
> نأخُذ العامل المُشترك في جميع الحدود بأصغر أُس .

معلومات مفيدة :

(١) تعتبر خوارزمية إقليدس في إيجاد العامل المشترك الأكبر واحدة من أقدم الخوارزميات الجارية الاستعمال ، ظهرت في كتاب الأصول لإقليدس عام ٣٠٠ ق . م تقريبًا .

(٢) المهندس الزراعي يقوم بتحليل التربة (طينية - رملية - صخرية) لمعرفة نوع الزراعة المناسبة لها ولزراعة أنواع من الخضروات والفواكه والمحاصيل الموسمية .

تدرّب (٢) :

أ أوجد (ع . م . أ) للحدين ٨ ب^{٤} جـ^{٣} ، ٣٢ ب^{٥} جـ^{٢}

٨ ب^{٤} جـ^{٣} = ٢^{٣} ب^{٤} جـ^{٣}

٣٢ ب^{٥} جـ^{٢} = ٢^{٥} ب^{٥} جـ^{٢}

∴ (ع . م . أ) للحدين هو ٢^{٣} ب^{٤} جـ^{٢}

ب أوجد (ع . م . أ) لحدود المقدار ٣٥ ع^{٢} ل^{٣} + ١٤ ع^{٤} ل^{٢} − ٧ ع^{٣} ل

٣٥ ع^{٢} ل^{٣} = ٥ × ٧ × ع^{٢} × ل^{٣}

١٤ ع^{٤} ل^{٢} = ٢ × ٧ × ع^{٤} × ل^{٢}

٧ ع^{٣} ل = ٧ × ع^{٣} × ل

∴ (ع . م . أ) للمقدار هو ٧ × ع^{٢} × ل^{١} = ٧ ع^{٢} ل

تدرّب (٣) :

أوجد (ع . م . أ) لحدود كلٍّ من المقادير التالية :

أ ٣ ل^{٥} ع^{٤} − ٩ ع^{٥} ل^{٣} + ٦ ع^{٢} ل^{٢}

٣ ل^{٥} ع^{٤} = ٣ × ل^{٥} × ع^{٤}

٩ ع^{٥} ل^{٣} = ٣ × ل^{٣} × ع^{٥} × ٣ ع.م.أ = ٣ ل^{٢} ع^{٢}

٦ ع^{٢} ل^{٢} = ٣ × ل^{٢} × ع^{٢}

ب ١٤ ل^{٢} ص^{٥} س^{٣} + ٧ ل^{٣} ص^{٤} س^{٢} + ٥ ل^{٤} س

١٤ ل^{٢} ص^{٥} س^{٣} = ٢ × ٧ × ل^{٢} × ص^{٥} × س^{٣}

٧ ل^{٣} ص^{٤} س^{٢} = ٧ × ل^{٣} × ص^{٤} × س^{٢}

٥ ل^{٤} س = ل^{٤} س × ٥

ع.م.أ = ل^{٢} س

تمــرَّنْ :

١ أوجد (ع . م . أ) لكلٍّ مما يلي :

أ ١٨ ، ٢٧

١٨ = ٢ × $\boxed{٣}$ × $\boxed{٣}$

٢٧ = $\boxed{٣}$ × $\boxed{٣}$ × ٣

ع.م.أ = ٣ × ٣ = ٩

ب ٥ ص^{٢} ، ص^{٦}

٥ ص^{٢} = ٥ × ص^{٢}

ص^{٦} = ص^{٦}

ع.م.أ = ص^{٢}

جـ ٨ ص^{٤} ، ١٢ ص^{٣} ، ١٦

٨ ص^{٤} = ٢^{٣} × ص^{٤}

١٢ ص^{٣} = ٢^{٢} × ٣ × ص^{٣}

١٦ = ٢^{٤}

ع.م.أ = ٢^{٢} = ٤

د ٦س^{٤} ص^{٣} ، ٩ س^{٢} ص^{٥}

٦ س^{٤} ص^{٣} = ٢ × ٣ × س^{٤} × ص^{٣}

٩ س^{٢} ص^{٥} = ٣ × س^{٢} × ص^{٥} × ٣

ع.م.أ = ٣ س^{٢} ص^{٣}

هـ ٤ ب^{٣} ، ١٤ب^{٢} ، ٢٠ب^{٥}

ع.م.أ = ٢ ب^{٢}

و ٩ أ^{٢} ، ١٢ أ ب

ع.م.أ = ٣ أ

ز ٢٧ب^{٢} ن^{٤} ، ١٨ ب ك^{٢} ن^{٣}

ع.م.أ = ٣^{٢} ب ن^{٣}

= ٩ ب ن^{٣}

ح ١٠ ص ع ، ٤٠ س^{٢} ص

ع.م.أ = ١٠ ص

٢ أوجد (ع . م . أ) لحدود المقادير التالية :

أ ٤٢ س^{٧} ص + ٦ س

٤٢ س^{٧} ص = ٢ × ٣ × ٧ × س^{٧} × ص

٦ س = ٢ × ٣ × س

ع.م.أ = ٦ س

ب ١٨ هـ^{٣} ص^{٤} − ٥٤ ل^{٢} هـ^{٦}

١٨ هـ^{٣} ص^{٤} = ٢ × ٣ × ٣ × هـ^{٣} × ص^{٤}

٥٤ ل^{٢} هـ^{٦} = ٢ × ٣ × ٣ × هـ^{٦} × ٣ × ل^{٢}

ع.م.أ = ١٨ هـ^{٣}

جـ ١٤ك^{٢} ص^{٥} س^{٣} + ٧ك ص س + ٢١ك س

١٤ ك^{٢} ص^{٥} س^{٣} = ٢ × ٧ × ك^{٢} × ص^{٥} × س^{٣}

٧ ك ص س = ٧ × ك × ص × س

٢١ ك س = ٧ × ك × س × ٣

ع.م.أ = ٧ ك س

د ٥س^{٤} ص^{٥} − ١٠ص^{٤} س^{٥} + ١٥ص^{٣} س^{٢}

٥ س^{٤} ص^{٥} = ٥ × س^{٤} × ص^{٥}

١٠ ص^{٤} س^{٥} = ٥ × س^{٥} × ص^{٤} × ٢

١٥ ص^{٣} س^{٢} = ٥ × س^{٢} × ص^{٣} × ٣

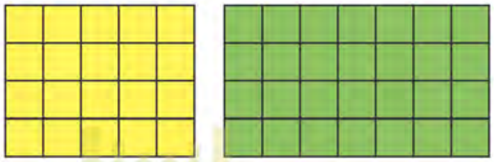
ع.م.أ = ٥ س^{٢} ص^{٣}

١٠-٢ التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
Factorise Using The GCF

سوف تتعلّم : التحليل بإخراج العامل المُشترك الأكبر للتعبيرات الجبرية .

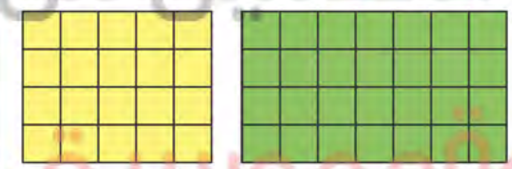
العبارات والمفردات :
عامل Factor
عامل أولي Prime Factor
تحليل إلى عوامل أولية Prime Factorisation

نشاط :



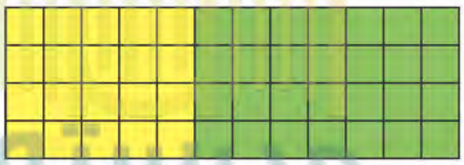
قال خالد لصديقه جاسم إنَّه يستطيع إيجاد مساحة المستطيلين المرسومين بطريقتين مختلفتين هما :

الطريقة الأولى :



مساحة المستطيلين = (٤ × ٧) + (٤ × ٥)
= ٢٨ + ٢٠
= ٤٨

الطريقة الثانية :



مساحة المستطيلين = ٤ × (٧ + ٥)
= ٤ × ١٢
= ٤٨

معلومات مفيدة :
يستخدم النجارون التحليل في كثير من الأمور ، كتصميمهم للخزائن الخشبية المُفرغة من الداخل ، وغيرها الكثير من الاستخدامات .

نلاحظ أنَّ :

(٤ × ٧) + (٤ × ٥) = ٤ × (٧ + ٥)
تحليل بأخذ العامل المشترك الأكبر

٤ × (٧ + ٥)
= (٤ × ٧) + (٤ × ٥)
توزيع عملية الضرب على الجمع

يسمى ٤ ، (٧ + ٥) عاملي المقدار ٤ × (٧ + ٥) ،
حيث ٤ هو العامل المشترك الأكبر للمقدار : (٤ × ٧) ، (٤ × ٥)

تذكَّرْ أنَّ :
الخاصية التوزيعية :
س × (ب + جـ)
= س ب + س جـ

بصورة عامة :

أ ب + أ جـ = أ (ب + جـ) ، أ ب - أ جـ = أ (ب - جـ)

ملاحظة : إنَّ المقدار بين القوسين ينتج من قسمة كل حد على (ع . م . أ) .

مثال :

حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر للمقدار : ٤أ + ٦ب − ٨جـ

الحل :

(١) (ع . م .أ) للحدود هو ٢ — نوجد (ع . م .أ) بين حدود المقدار الجبري

(٢) $\frac{٤أ}{٢} + \frac{٦ب}{٢} - \frac{٨جـ}{٢}$ — نقسم كل حد من حدود المقدار على (ع . م .أ)

= ٢أ + ٣ب − ٤ جـ

(٣) ٢ × (٢أ + ٣ب − ٤ جـ) — نضع المقدار الجبري على صورة حاصل ضرب عاملين

تدرّب (١) :

حلِّل بإخراج العامل المشترك الأكبر :

أ) ٤س − ٨ص

(١) (ع . م .أ) للحدين = ٤ (٢) $\left(\frac{٤س - ٨ص}{٤}\right)$ = س − ٢ص

(٣) ٤س − ٨ص = ٤ (س − ٢ص)

ب) $٣أب^٢ + ٦أ^٢ب$

(١) (ع . م .أ) للحدين = ٣أب (٢) $\left(\frac{٣أب^٢ + ٦أ^٢ب}{٣أب}\right)$ = ب + ٢أ

(٣) $٣أب^٢ + ٦أ^٢ب$ = ٣أب (ب + ٢أ)

جـ) $٤س + ٦س^٢ - ٨س^٣$

(١) (ع . م .أ) للحدود = ٢س

(٢) $\left(\frac{٤س}{٢س} + \frac{٦س^٢}{٢س} - \frac{٨س^٣}{٢س}\right)$

(٣) ٢س (٢ + ٣س − $٤س^٢$)

تدرّب (٢) :

حلِّل المقادير الجبرية التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر :

أ) $٣ص - ٩ص^٢$

(١) (ع . م . أ) للحدين = ٣ص

(٢) $٣ص^٢ - ٩ص^٢ = ٣ص\left(\frac{٣ص}{٣ص} - \frac{٩ص^٢}{٣ص}\right)$

(٣) $٣ص - ٩ص^٢$ = ٣ص (١ − ٣ص)

ب ٤ (س + ٣) + ص (س + ٣)

(ع . م . أ) للحدود = س + ٣

٤ (س + ٣) + ص (س + ٣) = (س + ٣) (٤ + ص)

تدرّب (٣) :

أ حلّل المقدار ٢س^{٢} ص + ٣س ص^{٢} بإخراج العامل المشترك الأكبر.

(ع . م . أ) للحدين = س ص

٢س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} = س ص (٢س + ٣ص)

ب اكتب في أبسط صورة : $\dfrac{\text{٢ س}^{٢}\text{ ص + ٣ س ص}^{٢}}{\text{س ص}}$ حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠

$\dfrac{\text{٢ س}^{٢}\text{ ص + ٣ س ص}^{٢}}{\text{س ص}}$ = $\dfrac{\text{س ص (٢س + ٣ص)}}{\text{س ص}}$ باستخدام التحليل في (أ)

= ٢س + ٣ص بالتبسيط

فكِّر وناقِش

التحدي :

الشكل المقابل مربع ، رُسمت دائرة نصف قطرها (نق) تمس أضلاع المربع من الداخل . أراد سعود أن يُعيّن مساحة المنطقة الحمراء بدلالة (نق) ثم أن يقوم بتحليل مقدار الناتج . ساعد سعود على حلها .

مثال :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

س^{٣} − س^{٢} + ٢س − ٢

الحل :

س^{٣} − س^{٢} + ٢س − ٢

= (س^{٣} − س^{٢}) + (٢س − ٢)

= س^{٢} (س − ١) + ٢(س − ١)

= (س − ١) (س^{٢} + ٢)

تمــرَّنْ :

١ حلل المقادير التالية بإخراج العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

أ ٧ + ٧ ص ع.م.أ = ٧

٧ (١ + ص)

ب ٩س^{2} + ٣س ع.م.أ = ٣س

٣ س (٣س + ١)

جـ س^{2} ص + س ك ع.م.أ = س

س (س ص + ك)

د ٦ س^{3} + ٨ ص س ع.م.أ = ٢س

٢س (٣ س^{2} + ٤ص)

هـ ٢ص^{2} س^{2} − ٢س ع.م.أ = ٢س

٢س (ص^{2} س − ١)

و ٨س^{2} ص^{3} − ١٢ س^{3} ص

ع.م.أ = ٤ س^{2} ص

٤ س^{2} ص (٢ص^{2} − ٣ س)

ز ٢٧س ص^{5} + ٩ س^{2} ص^{3}

ع.م.أ = ٩ س ص^{3}

٩ س ص^{3} (٣ ص^{2} + س)

ح ٣ ل^{5} ع^{4} − ٩ ع^{5} ل^{3} + ٦ ع^{2} ل^{2}

ع.م.أ = ٣ ل^{2} ع^{2}

٣ل^{2} ع^{2} (ل^{3} ع^{2} − ٣ل ع^{3} + ٢)

ط ١٤ك^{2} ص^{5} س^{3} + ٧ك ص س + ٢١ ك س

ع.م.أ = ٧ ك س

٧ ك س (٢ك س^{2} ص^{5} + ص + ٣)

ي ٥س^{4} ص^{5} − ١٠ص^{4} س^{5} + ١٥ص^{3} س^{2}

ع.م.أ = ٥ س^{2} ص^{3}

٥ س^{2} ص^{3} (س^{2} ص^{2} − ٢ س^{3} ص + ٣)

ك س (أ − ٢) − ص (أ − ٢)

ع.م.أ = (أ − ٢)

(أ − ٢) (س − ص)

ل أ ص − أ س + ب ص − ب س

أ (ص − س) + ب (ص − س)

(ص − س) (أ + ب)

٢ اكتب المقادير التالية في أبسط صورة :

أ $\frac{\text{س}^{2} - \text{س}^{3}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{س}^{2}(1 - \text{س})}{\text{س}}$ = س (١ − س)

ب $\frac{3\text{س}^{2} - 6\text{س ص}}{3\text{س}}$ = $\frac{3\text{س}(\text{س} - 2\text{ص})}{3\text{س}}$ = س − ٢ص

TIMSS 2019

٣ إذا كان : أ + ب = ١٥ ، فما هي قيمة ٢أ + ٢ب + ٨ ؟

٢أ + ٢ب + ٨ = ٢(أ + ب + ٤) = ٢(١٥ + ٤) = ٢ × ١٩ = ٣٨

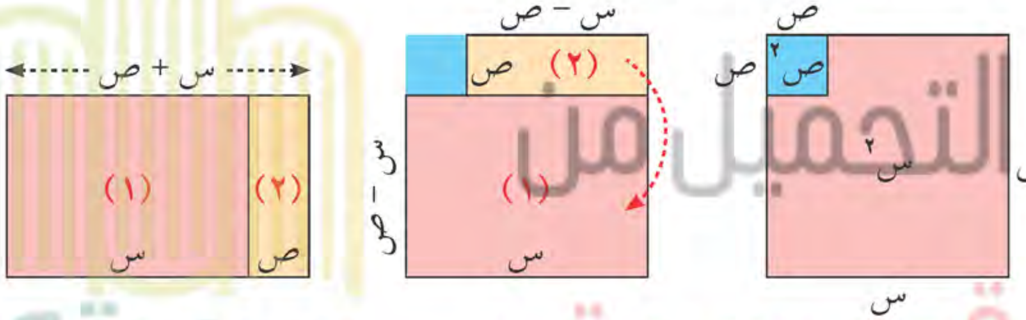
١٠-٣ تحليل الفرق بين مُربعين
Factorising the Difference of Two Squares

سوف تتعلّم : تحليل ثُنائية الحدّ في صورة فرق بين مُربعين .

العبارات والمفردات :
فرق بين مُربعين
Difference of Two Squares.
تحليل الفرق بين مُربعين
Factorising The Difference of Two Squares

نشاط :

أرض مصنع مربعة الشكل مساحتها س^2 وحدة مربعة يراد أخذ غرفة منها مربعة الشكل مساحتها ص^2 وحدة مربعة لاستخدامها كمخزن .
احسب المساحة المتبقية من أرض المصنع .



(أ) (ب) (جـ)

تذكَّرْ أنَّ :
- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

من التمثيل السابق نجد أنَّ :

في الشكل (أ) : يمثل قطعة الأرض التي مساحتها س^2 وموضع الغرفة المراد أخذها والتي مساحتها ص^2 .

في الشكل (ب) : يمثل مساحة قطعة الأرض المتبقية من المصنع ($\text{س}^2 - \text{ص}^2$)
ومقسمة إلى منطقتين :

(١) منطقة مستطيلة بعداها س ، (س − ص) وحدة طول .
(٢) منطقة مستطيلة بعداها ص ، (س − ص) وحدة طول .

مساحة قطعة الأرض المتبقية = مساحة القطعة (١) + مساحة القطعة (٢)
= س (س − ص) + ص (س − ص)

($\text{س}^2 - \text{ص}^2$) = (س − ص) (س + ص) وحدة مربعة

معلومات مفيدة :
يستعمل مُصممو الأثاث التحليل إلى العوامل في تحديد أبعاد مساحة الغرف كي يستطيعوا تنظيم عملية توزيع الأثاث .

عمومًا :

الفرق بين مُربعي كميتين يساوي حاصل ضرب مجموع الكميتين في الفرق بينهما .
أي أنَّ : $\text{أ}^2 - \text{ب}^2$ = (أ − ب) (أ + ب) .

مثال (١) :

حلّل $س^٢ - ٤$ ، ثم تحقق من صحة إجابتك :

الحل :

لاحظ أنَّ : $س^٢$ مربع س ، كذلك ٤ مربع ٢

$$س^٢ - ٤ = (س)^٢ - (٢)^٢$$

$$= (س + ٢)(س - ٢)$$

التحقق : اضرب $(س + ٢)(س - ٢)$

$$(س + ٢)(س - ٢) = س^٢ - \cancel{٢س} + \cancel{٢س} - ٤$$

$$= س^٢ - ٤$$

تذكَّرْ أنَّ :
$س^٢ = س \times س$

تدرّب (١) :

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $ص^٢ - ١٦$

$ص^٢ - ١٦ = (ص)^٢ - (٤)^٢$

$= (ص + ٤)(ص - ٤)$

ب) $س^٢ - ٢٥ع^٢$

$س^٢ - ٢٥ع^٢ = (س)^٢ - (٥ع)^٢$

$= (س + ٥ع)(س - ٥ع)$

جـ) $٨١ - هـ^٢$

$٨١ - هـ^٢ = (٩)^٢ - (هـ)^٢$

$= (٩ - هـ)(٩ + هـ)$

د) $ل^٢ك^٢ - ٣٦$

$(لك)^٢ - (٦)^٢$

$= (لك + ٦)(لك - ٦)$

تدرّب (٢) :

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $س^٣ - س$

$س^٣ - س = س(س^٢ - ١)$

$= س(س - ١)(س + ١)$

ب) $٢ل^٢ - ١٨$

$٢ل^٢ - ١٨ = ٢(ل^٢ - ٩)$

$= ٢(ل - ٣)(ل + ٣)$

فكِّر وناقِش

يرى يوسف أنَّ س^{٢} + ص^{٢} يمكن تحليلها إلى (س + ص) (س + ص) .
فهل توافقه الرأي ؟ فسّر ذلك .

تدرّب (٣) :

حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ (س − ٢)^{٢} − ١٠٠

= (س − ٢)^{٢} − (١٠)^{٢}

= (س − ٢ + ١٠) (س − ٢ − ١٠)

= (س + ٨) (س − ١٢)

ب ٢٥ − (ن + ل)^{٢}

= (٥ − (ن + ل)) (٥ + (ن + ل))

= (٥ − ن − ل) (٥ + ن + ل)

تدرّب (٤) :

أوجد قيمة ما يلي بالتحليل :

أ (٩٣)^{٢} − (٧)^{٢}

= (٩٣ + ٧) (٩٣ − ٧)

= ١٠٠ × ٨٦

= ٨٦٠٠

ب (٥,٢٥)^{٢} − (٥,٤)^{٢}

= (٥,٢٥ + ٥,٤) (٥,٢٥ − ٥,٤)

= ٣٠ × ٢١

= ٦٣٠

مثال (٢) :

حلل ما يلي تحليلًا تامًا:

ص^{٢} (ص + ١) − ٤ (ص + ١)

الحل :

ص^{٢} (ص + ١) − ٤ (ص + ١)

= (ص + ١) (ص^{٢} − ٤)

= (ص + ١) (ص − ٢) (ص + ٢)

تدرّب (٥) :

حلّل ما يلي :

أ $٢٥\text{س}^{٢} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦}$

$= (٥\text{س})^{٢} - (\frac{\text{ص}}{٦})^{٢}$

$= (٥\text{س} + \frac{\text{ص}}{٦})(٥\text{س} - \frac{\text{ص}}{٦})$

ب $\frac{١}{٩}\text{س}^{٢} - \frac{١٦}{٢٥}\text{هـ}^{٢}$

$= (\frac{١}{٣}\text{س})^{٢} - (\frac{٤}{٥}\text{هـ})^{٢}$

$= (\frac{١}{٣}\text{س} - \frac{٤}{٥}\text{هـ})(\frac{١}{٣}\text{س} + \frac{٤}{٥}\text{هـ})$

فكِّر وناقِش

هل (س + ص + ٨) (س + ص − ٨) يمثلان عاملين لفرق بين مُربعين ؟ فسر ذلك .

تدرّب (٦) :

يلجأ مُصممو الأثاث إلى مفاهيم الرياضيات في تصميماتهم وذلك للخروج بنتائج دقيقة ، حيث وضع المُصمم عبد المحسن سجادة مستطيلة الشكل بعداها س ، ٢س ثم وضع فوق هذه السجادة طاولة طعام مستطيلة الشكل بعداها ص ، ٢ص حيث (س > ص) .

أ اكتب تعبيرًا جبريًّا يبين مساحة القطعة المتبقية من السجادة مستخدمًا س ، ص ، ثم حلّل هذا التعبير .

مساحة القطعة المتبقية من السجادة = مساحة السجادة − مساحة الطاولة

$= ٢\text{س} \times \text{س} - ٢\text{ص} \times \text{ص}$

$= ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{ص}^{٢}$

$= ٢(\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢})$

$= ٢(\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص})$

ب أوجد المساحة المتبقية من السجادة إذا كان س = ٣ وحدات طول ، ص = ٢ وحدة طول

المساحة المتبقية $= ٢(٣ - ٢)(٣ + ٢)$

$= ٢ \times ٥ = ١٠$ وحدات مربعة

تمـــرَّنْ :

١ أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

أ س^{٢} − ١٠٠ = (س + ١٠) (س − ١٠)

ب ٤ص^{٢} − ٤٩ = (٢ص + ٧) (٢ص − ٧)

جـ ٩ − ٢٥س^{٢} = (٣ + ٥س) (٣ − ٥س)

د ٠,١٦ − ٩ = (٠,٤)^{٢} − (٣)^{٢}

٢ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا ثم تحقق من صحة إجابتك :

أ س^{٢} − ٢٥

(س − ٥) (س + ٥)

التحقق : س^{٢} + ٥س − ٥س − ٢٥

= س^{٢} − ٢٥

ب ل^{٢} − ١٠٠ هـ^{٢}

(ل − ١٠هـ) (ل + ١٠هـ)

التحقق : ل^{٢} + ١٠لهـ − ١٠لهـ − ١٠٠هـ^{٢}

= ل^{٢} − ١٠٠هـ^{٢}

٣ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ ١ − ص^{٢}

(١ + ص) (١ − ص)

ب ٤م^{٢} − ٣٦

٤(م^{٢} − ٩)

٤(م − ٣) (م + ٣)

جـ ٤س^{٢} − ٩ص^{٢}

(٢س − ٣ص) (٢س + ٣ص)

د ٤٩ن^{٢} − ٨١ك^{٢}

(٧ن − ٩ك) (٧ن + ٩ك)

هـ ٤س^{٢} − ١٠٠

= ٤(س^{٢} − ٢٥)

= ٤(س − ٥) (س + ٥)

و ٣٦ − ٩ع^{٢}

= ٩(٤ − ع^{٢})

= ٩(٢ − ع) (٢ + ع)

ز ٧٥ − ٣م^{٢}

٣(٢٥ − م^{٢})

٣(٥ − م)(٥ + م)

ح ٢س − ١٨س^{٣}

٢س(١ − ٩س^{٢})

٢س(١ − ٣س)(١ + ٣س)

٤ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ (م + ١)^{٢} − ٤٩

((م + ١) + ٧)((م + ١) − ٧)

(م + ٨)(م − ٦)

ب (ن − ٠,٤)^{٢} − (٠,١٦)^{٢}

(ن − ٠,٤ − ٠,١٦)(ن − ٠,٤ + ٠,١٦)

(ن − ٠,٥٦)(ن − ٠,٢٤)

٥ أوجد قيمة ما يلي بالتحليل :

أ (١١٥)^{٢} − (١١٤)^{٢}

(١١٥ + ١١٤)(١١٥ − ١١٤)

٢٢٩ × ١ = ٢٢٩

ب (٩٩)^{٢} − ١

(٩٩ + ١)(٩٩ − ١)

١٠٠ × ٩٨ = ٩٨٠٠

جـ (٢١٠)^{٢} − (٢٠٩)^{٢}

(٢١٠ + ٢٠٩)(٢١٠ − ٢٠٩)

٤١٩ × ١ = ٤١٩

د (٥٧,٧)^{٢} − (٤٢,٣)^{٢}

(٥٧,٧ + ٤٢,٣)(٥٧,٧ − ٤٢,٣)

١٠٠ × ١٥,٤ = ١٥٤٠

٦ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $\frac{٤س^{٢}}{ب^{٢}} - \frac{جـ^{٢}}{٩}$

$(\frac{٢س}{ب} + \frac{جـ}{٣})(\frac{٢س}{ب} - \frac{جـ}{٣})$

ب $\frac{١}{٢٥ص^{٢}} - ع^{٢}$

$(\frac{١}{٥ص} - ع)(\frac{١}{٥ص} + ع)$

جـ (٥ − ٤م)^{٢} − ١٢١

((٥ − ٤م + ١١)(٥ − ٤م − ١١))

(١٦ − ٤م)(−٦ − ٤م)

٤(٤ − م)[−٢(٣ + ٢م)]

٢[٢(٤ − م)(−٣ − ٢م)]

د $\frac{١}{٤}$ هـ^{٢} − ٢٥ع^{٢}ل^{٢}

($\frac{١}{٢}$هـ − ٥عل)($\frac{١}{٢}$هـ + ٥عل)

١٠-٤ حل معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد
Solving a First Degree Equation With One Variable

سوف تتعلّم: كيفية حل معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

العبارات والمفردات :
معادلة Equation
متغير Variable
عملية عكسية Inverse Property

معلومات مفيدة :
يعتمد عمل كاميرات المرور لحساب سرعة السيارات المخالفة على معادلات مبرمجة داخلها ، وتقوم الكاميرا بحساب الزمن الذي تقطعه السيارة خلال المسافة التي ترصدها ومنها تعين السرعة وتحدد إن كانت السيارة مخالفة أم لا حسب حدود السرعة المسموح بها .

نشاط :

مما سبق دراسته أكمل حل المعادلات التالية ، حيث س ∈ ص .

أ) س + ٥ = ٧
س + ٥ − ٥ = ٧ − ٥
س = ٢

ب) س − ٣ = ١٤
س − ٣ + ٣ = ١٤ + ٣
س = ١٧

جـ) ٢س = ١٠
$\frac{٢}{٢}$ س = $\frac{١٠}{٢}$
س = ٥

د) $\frac{س}{٦}$ = ٨
٦ × $\frac{س}{٦}$ = ٨ × ٦
س = ٤٨

تدرّب (١) :

يعرض أحد مواقع الإعلانات فستانًا بتصميم معين بمبلغ ١٢ دينارًا ، يضاف إليه ٣ دنانير مقابل خدمة التوصيل إلى المشتري ، فإذا أرادت ندى أن تشتري عددًا من الفساتين بمبلغ ٧٥ دينارًا ، فكم فستانًا يمكن أن تشتري ؟

الحل :

نفرض أنَّ عدد الفساتين هو س فستانًا .

أكمل :

١٢س + ٣ = ٧٥

١٢س + ٣ − ٣ = ٧٥ − ٣

١٢س = ٧٢

$\frac{١٢}{١٢}$ س = $\frac{٧٢}{١٢}$

س = ٦

∴ عدد الفساتين التي اشترتها ندى هو ٦ فساتين .

تدرّب (٢) :

أوجد حل المعادلات التالية حيث س ∈ ص :

أ) ٣ س − ٤ = −١٨ − س

٣ س − ٤ + س = −١٨ − س + س

٤ س − ٤ = −١٨

٤ س − ٤ + ٤ = −١٨ + ٤

٤ س = −١٤

$\frac{٤}{٤}$ س = $\frac{-١٤}{٤}$

س = $\frac{-٧}{٢}$

ب) ٥ (س − ٢) = ٤

٥ س − ١٠ = ٤

٥ س − ١٠ + ١٠ = ٤ + ١٠

٥س = ١٤

س = $\frac{١٤}{٥}$ = ٢ $\frac{٤}{٥}$

فكّر وناقش

لهذه المعادلة ٥س − ٢ = ٥س − ٦ يوجد :

أ) حلّ وحيد

ب) عدد لانهائي من الحلول

ج) لا يوجد حلّ

د) يوجد حلّان

تدرّب (٣) :

أوجد حلّ المعادلة حيث س ∈ ص :

$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٣}{٥}$ س = $\frac{٣٨}{٥}$

س ($\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٣}{٥}$) = $\frac{٣٨}{٥}$

س ($\frac{\dots}{١٥}$ + $\frac{\dots}{١٥}$) = $\frac{٣٨}{٥}$

$\frac{\dots}{١٥}$ س = $\frac{٣٨}{٥}$

س = $\frac{٣٨}{\cancel{٥}\ ١}$ × $\frac{\dots}{\dots}$

س = $\frac{\dots}{\dots}$

مثال (١):

اكتب ٠,$\overline{٦}$ على شكل كسر في أبسط صورة.

الحل:

ليكن ن = ٠,$\overline{٦}$	استخدم متغيّرًا واجعله يساوي الكسر العشري المتكرر
١٠ × ن = ١٠ × ٠,$\overline{٦}$	اضرب الطرفين في ١٠ (لأن رقمًا عشريًّا واحدًا يتكرر)
١٠ن = ٦,$\overline{٦}$	
١٠ن − ن = ٦,$\overline{٦}$ − ن	اطرح ن من الطرفين
٩ن = ٦,$\overline{٦}$ − ٠,$\overline{٦}$	عوّض. (تذكر أنّ ن = ٠,$\overline{٦}$)
٩ن = ٦	
$\frac{\text{٩ن}}{\text{٩}} = \frac{\text{٦}}{\text{٩}}$	اقسم على ٩ لإيجاد قيمة ن
ن = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$	اكتب الكسر في أبسط صورة
∴ ٠,$\overline{٦}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$	

> **تذكّرْ أنّ:**
> المعكوس الجمعي للعدد أ هو (− أ) بحيث أ + (− أ) = صفر
> المعكوس الضربي للعدد أ هو $\frac{\text{١}}{\text{أ}}$ بحيث أ × $\frac{\text{١}}{\text{أ}}$ = ١

مثال (٢):

اكتب ٠,$\overline{١٥}$ على شكل كسر في أبسط صورة:

الحل:

ليكن ن = ٠,$\overline{١٥}$	استخدم متغيّرًا واجعله يساوي الكسر العشري المتكرر
١٠٠ × ن = ١٠٠ × ٠,$\overline{١٥}$	اضرب الطرفين في ١٠٠ (لأنّ رقمين عشريّين يتكرّران)
١٠٠ن = ١٥,$\overline{١٥}$	
١٠٠ن − ن = ١٥,$\overline{١٥}$ − ن	اطرح ن من الطرفين
٩٩ن = ١٥,$\overline{١٥}$ − ٠,$\overline{١٥}$	عوّض. (تذكر أنّ ن = ٠,$\overline{١٥}$)
= ١٥	
$\frac{\text{٩٩ن}}{\text{٩٩}} = \frac{\text{١٥}}{\text{٩٩}}$	اقسم على ٩٩ لإيجاد قيمة ن
ن = $\frac{\text{١٥}}{\text{٩٩}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣٣}}$	اكتب الكسر في أبسط صورة
∴ ٠,$\overline{١٥}$ = $\frac{\text{٥}}{\text{٣٣}}$	

تمـــرَّنْ :

تذكَّرْ أنَّ :
الخاصية التوزيعية
أ (س + ص)
= أ س + أ ص

١ حل كلًّا من المعادلات التالية في ص ، ثم تحقق من صحة إجابتك :

أ ٣ص + ٤ = ١٩

٣ص + ٤ − ٤ = ١٩ − ٤

$\frac{٣ص}{٣} = \frac{١٥}{٣}$ ⟸ ص = ٥

التحقق : ٣ × ٥ + ٤ = ١٩

ب ٢ (س − ٧) = ٥

٢س − ١٤ = ٥

٢س − ١٤ + ١٤ = ٥ + ١٤

$\frac{٢س}{٢} = \frac{١٩}{٢}$ ⟸ س = $٩\frac{١}{٢}$

التحقق : ٢ × $٢\frac{١}{٢}$ = ٢ × $\frac{٥}{٢}$ = ٥

جـ $\frac{١}{٢}$ ك + ١٩ = ١١

$\frac{١}{٢}$ ك + ١٩ − ١٩ = ١١ − ١٩

$\frac{١}{٢}$ ك = −٨

$\frac{١}{٢}$ × ٢ × ك = −٨ × ٢

ك = −١٦

د ٥س = ٣ (س + ٢)

٥س = ٣س + ٦

٥س − ٣س = ٦

س = ٣ ⟸ $\frac{٢}{٢}$س = $\frac{٦}{٢}$ ⟸ س = ٣

TIMSS 2019

٢ قطعة خشبية كان يبلغ طولها ٤٠ سم قطعت إلى ثلاث قطع .

أطوال القطع الثلاث بالسنتيمتر هي :

٢س − ٥ ، س + ٧ ، س + ٦

ما هو طول القطعة الأكثر طولًا ؟

٢س − ٥ + س + ٧ + س + ٦ = ٤٠

٤س + ٨ = ٤٠ ⟸ ٤س + ٨ − ٨ = ٤٠ − ٨

$\frac{٤س}{٤} = \frac{٣٢}{٤}$ ⟸ س = ٨ طول القطعة الأولى : ٢ × ٨ − ٥ = ١١

الثانية : ٨ + ٧ = ١٥

الثالثة : ٨ + ٦ = ١٤

القطعة الثانية الأطول

٣ اكتب كلًّا ممّا يلي على شكل كسر في أبسط صورة موضِّحًا خطوات الحل .

أ $٠,\overline{٣}$

ليكن ن = $٠,\overline{٣}$

١٠ × ن = ١٠ × $٠,\overline{٣}$

١٠ ن = $٣,\overline{٣}$

١٠ن − ن = $٣,\overline{٣}$ − $٠,\overline{٣}$

$\frac{٩ن}{٩} = \frac{٣}{٩}$

ن = $\frac{١}{٣}$

$٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$

ب $٠,\overline{٢٤}$

ليكن ن = $٠,\overline{٢٤}$

١٠٠ × ن = $٠,\overline{٢٤}$ × ١٠٠

١٠٠ ن = $٢٤,\overline{٢٤}$

١٠٠ ن − ن = $٢٤,\overline{٢٤}$ − $٠,\overline{٢٤}$

$\frac{٩٩ن}{٩٩} = \frac{٢٤}{٩٩}$

ن = $\frac{٨}{٣٣}$ = $٠,\overline{٢٤}$

TIMSS 2019

٤ يمثل ١٥س + ١٠ أجرة مريم بعملة (الزد) ليوم عمل واحد في أحد المطاعم ، س تمثل عدد الساعات التي تعملها مريم في اليوم . تأخذ مريم ١٠ زد في اليوم بدل سفرها في الباص .

أ ما الذي يمثله العدد ١٥ في التعبير الجبري ؟

عدد لساعات التي تعملها مريم

ب عملت مريم يوم الأحد ٤ ساعات ، كم زدًا تأخذ ؟

١٥ × ٤ + ١٠ = ٦٠ + ١٠ = ٧٠ زداً

جـ كم ساعة يجب أن تعمل مريم يوم الإثنين لكي تحصل على ١١٥ زد ؟

١٥س + ١٠ = ١١٥

١٥س + ١٠ − ١٠ = ١١٥ − ١٠

$\frac{\text{١٥س}}{\text{١٥}} = \frac{\text{١٠٥}}{\text{١٥}}$

س = ٧ ساعة

٥ كلفة إيجار سيارة في اليوم الواحد هي ١٢ دينارًا مضافًا إليها ٢٠ دينارًا بدل تأمين ثابت . في إحدى المرات دفع جمال ١٢٨ دينارًا مقابل سيارة استأجرها ، فكم يومًا استأجر جمال هذه السيارة ؟

نفرض ان عدد الايام س

١٢س + ٢٠ = ١٢٨

١٢س + ٢٠ − ٢٠ = ١٢٨ − ٢٠

$\frac{\text{١٢س}}{\text{١٢}} = \frac{\text{١٠٨}}{\text{١٢}}$ ⇐ س = ٩

عدد الايام = ٩ أيام

٦ يقول سالم: أختي تبلغ من العمر ٤ أضعاف العمر الذي يبلغه أخي ، وعند جمع عمريهما معًا فإنَّ المجموع يصبح ٢٠ . فكم عمر أخو سالم ؟

نفرض عمر الاخ س سنة
عمر الاخت ٤س سنة

٤س + س = ٢٠
٥س = ٢٠
س = ٤ عمر الاخ = ٤ سنوات

٧ يبلغ راتب مدير في إحدى الشركات ٣ أمثال راتب موظّف في الشركة نفسها مضافًا إليه ٦٠ دينارًا. إذا كان راتب المدير يساوي ١٣٦٥ دينارًا ، فكم يبلغ راتب الموظّف ؟

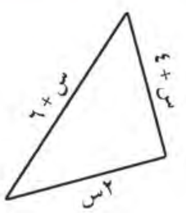
نفرض راتب الموظف س
راتب المدير ٣س + ٦٠

٣س + ٦٠ = ١٣٦٥
٣س = ١٣٦٥ − ٦٠
٣س = ١٣٠٥ ⇐ س = $\frac{١٣٠٥}{٣}$ = ٤٣٥ دينار

٨ إذا كان ٢س − ١ = ٩ ، فما قيمة ١٠س − ٥ ؟

(أ) ٧٥ (ب) ٥٥ (جـ) ٤٥ (د) ٢٥

٩ إذا كان مجموع أطوال أضلاع هذا المثلث = ٣٠ سم
فإنَّ طول الضلع الأطول بالسنتيمتر = ...



(أ) ١١ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٥

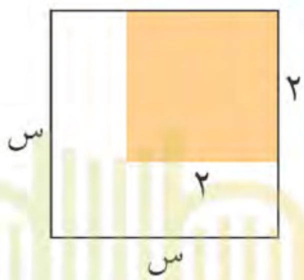
١٠-٥ حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد بالتحليل
Solving Second Degree Equations with One Variable by Factorising

سوف تتعلّم: حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل .

معلومات مفيدة :
يستخدم حل المعادلات التربيعية في مصانع إنتاج الصناديق الكرتونية .

نشاط :

طلى أحمد الجزء العلوي والأيمن من حائط منزله المربع الشكل (انظر الصورة إلى اليسار) .



أراد أن يحسب عرض الحائط س مع علمه أنَّ المساحة المتبقية للطلي هي ٥ أمتار مربعة .

١) أوجد مساحة الجزء المطلي . $٢ \times ٢ = ٤$ أمتار مربعة

٢) أوجد المساحة الكلية للحائط بدلالة س . $س^{٢}$

٣) أوجد المساحة المتبقية للطلي بدلالة س . $س^{٢} - ٤$

٤) اكتب معادلة المساحة المتبقية بدلالة س . $س^{٢} - ٤ = ٥$

٥) اكتب المعادلة في (٤) على صورة ضرب عاملين على أن يكون أحد طرفيها صفرًا . $(س - ٣)(س + ٣) = ٠$

٦) أوجد عرض الحائط . $س = ٣$

٧) بعد إيجادك عرض الحائط ، ماذا تستنتج من المعادلة $(س - ٣)(س + ٣) = ٠$ ؟ $س = ٣$ أو $س = -٣$

العبارات والمفردات :
معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد **Second Degree Equation with One Variable**
تحليل **Factorise**

ملاحظة :

لكل أ ، ب عددان نسبيان ، إذا كان أب = ٠ ، فإنَّ أ = ٠ أو ب = ٠ .

فمثلًا : إذا كان $(س + ٣)(س + ٢) = ٠$

فإنَّ $س + ٣ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$

مثال (١):

أوجد مجموعة حل المعادلة (س + ٥) (س + ٦) = ٠ ، حيث س ∈ ص ، ثم تحقق من صحة الحل .

الحل:

(س + ٥) (س + ٦) = ٠

إما س + ٥ = ٠ | أو س + ٦ = ٠
س = −٥ | س = −٦
∴ −٥ ∈ ص | ∴ −٦ ∈ ص

∴ مجموعة الحل = { −٥ ، −٦ }

التحقق من صحة الحل :

عندما س = −٥ نعوّض
(−٥ + ٥) (−٥ + ٦) ≟ ٠
٠ × ١ ≟ ٠
٠ = ٠ ✓

عندما س = −٦ ، نعوّض
(−٦ + ٥) (−٦ + ٦) ≟ ٠
−١ × ٠ ≟ ٠
٠ = ٠ ✓

تدرّب (١):

أوجد مجموعة حل المعادلة : (٣ص − ٥) (ص − ٢) = ٠ ، حيث ص ∈ ص ، ثم تحقق من صحة الحل .

(٣ص − ٥) (ص − ٢) = ٠

∴ إما ٣ص − ٥ = ٠ | أو ص − ٢ = ٠
٣ص = ٥ | ص = ٢ ، ٢ ∈ ص

ص = $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ∉ ص

∴ مجموعة الحل = { $\frac{٥}{٣}$ ، ٢ }

التحقق من صحة الحل :

عندما ص = $\frac{٥}{٣}$
(٣ × $\frac{٥}{٣}$ − ٥) ($\frac{٥}{٣}$ − ٢)
٠ × $-\frac{١}{٣}$ = ٠

عندما ص = ٢
(٣ × ٢ − ٥) (٢ − ٢)
١ × ٠ = ٠

ملاحظة :
المعادلتان:
$س^٢ - ٤ = ٠$ ،
$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$
تسميان معادلتين متكافئتين .

مثال (٢) :

أ أوجد مجموعة حل المعادلة $٤س^٢ - ٥س = ٠$ ، حيث $س \in ص$.

الحل :

$٤س^٢ - ٥س = ٠$

$س(٤س - ٥) = ٠$ حلّل

إما $س = ٠$ أو $٤س - ٥ = ٠$ حل معادلات من الدرجة الأولى

$س = ٠$ أو $٤س = ٥$

$س = ٠$ أو $\frac{٤س}{٤} = \frac{٥}{٤}$

$\therefore س = ٠$ أو $س = \frac{٥}{٤}$

$\therefore ٠ \in ص$ $\therefore \frac{٥}{٤} \notin ص$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٠\}$

ب أوجد مجموعة حل المعادلة $س^٢ = ٤$ ، حيث $س \in ح$.

الحل :

$س^٢ = ٤$

$س^٢ - ٤ = ٠$

$(س)^٢ - (٢)^٢ = ٠$ فرق بين مربعين

$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$

$\therefore س = ٢$ أو $س = -٢$

$\therefore ٢ \in ح$ $\therefore -٢ \in ح$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٢ ، -٢\}$

جـ أوجد مجموعة حل المعادلة $(س + ٣)^٢ - ١ = ٠$ ، حيث $س \in ط$.

الحل :

$(س + ٣)^٢ - ١ = ٠$

$(س + ٣ + ١)(س + ٣ - ١) = ٠$ فرق بين مربعين

$(س + ٤)(س + ٢) = ٠$ بسّط

إما $س + ٤ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$

$\therefore س = -٤$ أو $س = -٢$

$\therefore -٤ \notin ط$ $\therefore -٢ \notin ط$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\varnothing\}$

فكِّر وناقِش

هل للمعادلة س^{٢} + ٤ = ٠ حل في ن (مجموعة الأعداد النسبية) ؟ فسّر إجابتك .

تدرَّب (٢) :

أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية :

أ ٢م^{٢} = ٥٠ ، حيث م ∈ ن

٢م^{٢} − ٥٠ = ٠

٢ (م^{٢} − ٢٥) = ٠

٢ (م + ٥) (م − ٥) = ٠

إما ٢ = ٠ وهو مرفوض (م + ٥) = ٠ ⟸ م = −٥

(م − ٥) = ٠ ⟸ م = ٥

∴ مجموعة الحل = { −٥ ، ٥ }

ب (ص + ٢)^{٢} − ٩ = ٠ ، حيث ص ∈ ن

[(ص + ٢) − ٣] [ص+٢ + ٣] = ٠

(ص − ١) (ص + ٥) = ٠

إما (ص − ١) = ٠ أو (ص + ٥) = ٠

ص = ١ ∈ ن | ص = −٥ ∈ ن

∴ مجموعة الحل = { ١ ، −٥ }

تمــرَّنْ :

١ تحقق من أنَّ :

أ س = ١ حلًّا للمعادلة :
(س + ٤) (س − ١) = ٠

(١+٤)(١−١)

٥ × ٠ = ٠

نعم حل

ب س = −١ حلًّا للمعادلة :
(س − ١)^{٢} = ٠

(−١−١)^{٢} = (−٢)^{٢} = ٤

ليس حل

٢ أوجد مجموعة حلّ كل من المعادلات التالية حيث س ∈ ح .

أ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

س + ٤ = ٠ | س − ٢ = ٠

س = −٤ ∈ ن | س = ٢ ∈ ن

م.ح = { −٤ ، ٢ }

ب (س + ٤) (٣س + ١٠) = ٠

س + ٤ = ٠ | ٣س + ١٠ = ٠

س = −٤ ∈ ن | ٣س = −١٠ ⟸ س = $-\frac{١٠}{٣}$ ∈ ن

م.ح = { −٤ ، $-\frac{١٠}{٣}$ }

جـ (س + ٨) (س + ٧) = ٠

س + ٨ = ٠ | س + ٧ = ٠

س = −٨ ∈ ن | س = −٧ ∈ ن

م.ح = { −٨ ، −٧ }

د (٢س + ٥) (س − ٥) = ٠

٢س + ٥ = ٠ | س − ٥ = ٠

٢س = −٥ | س = ٥ ∈ ن

س = $-\frac{٥}{٢}$ ∈ ن

م.ح = { $-\frac{٥}{٢}$ ، ٥ }

TIMSS 2019

٣ إذا كان س − ٤ = ٩ ، فما قيمة س^{٢} − ٤ ؟

(أ) ١٦٩ (ب) ١٦٥ (جـ) ٩٧ (د) ٨١

٤ أوجد مجموعة حلّ كل من المعادلات التالية حيث س ∈ ح .

أ ٣س^{٢} − ٢٧ = ٠

٣ (س^{٢} − ٩) = ٠

٣ (س − ٣)(س + ٣) = ٠

إما ٣ = ٠ مرفوض | س − ٣ = ٠ ، س = ٣ ∈ ن | س + ٣ = ٠ ، س = −٣ ∈ ن

م.ح = {٣ ، −٣}

ب (س + ٢)^{٢} − ٢٥ = ٠

(س + ٢ − ٥)(س + ٢ + ٥) = ٠

(س − ٣)(س + ٧) = ٠

س − ٣ = ٠ ، س = ٣ ∈ ن | س + ٧ = ٠ ، س = −٧ ∈ ن

م.ح = {٣ ، −٧}

جـ ٥س^{٢} = ٨٠

٥س^{٢} − ٨٠ = ٠ ⇐ ٥ (س^{٢} − ١٦) = ٠

٥ (س − ٤)(س + ٤) = ٠

إما ٥ = ٠ مرفوض | س − ٤ = ٠ ، س = ٤ | س + ٤ = ٠ ، س = −٤

م.ح = {٤ ، −٤}

د (س − ٩)^{٢} = ٨١

(س − ٩)^{٢} − ٨١ = ٠ ⇐ (س − ٩ + ٩)(س − ٩ − ٩) = ٠

س (س − ١٨) = ٠

س = ٠ | س − ١٨ = ٠ ، س = ١٨

م.ح = {٠ ، ١٨}

٥ مجموعة حل المعادلة ٤س^{٢} + ١ = ٠ ، حيث س ∈ ح تساوي :

(أ) {$\frac{١}{٢}$} (ب) {−$\frac{١}{٢}$} (جـ) {$\frac{١}{٢}$ ، −$\frac{١}{٢}$} (د) ∅

TIMSS 2019

٦ إذا كان مربع عدد (لا يساوي صفرًا) مضافًا إليه نصفه يساوي نفس العدد فإنَّ العدد هو :

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −$\frac{١}{٢}$

١٠-٦ حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد
Solving First Degree Inequalities with One Variable

سوف تتعلّم: كيفية حل متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

العبارات والمفردات :
متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد
First Degree Inequality with One Variable
حل متباينة
Solving Inequality

نشاط :

مصعد إحدى البنايات حمولته القصوى ٥٠٠ كيلوجرام ، فإذا كان متوسط وزن الشخص الواحد ٨٠ كيلوجرامًا من سكان البناية ، **فما هو أكبر عدد من الأشخاص الذين يسمح لهم بركوب المصعد في الوقت نفسه ؟**

نفرض أنَّ عدد الأشخاص هو س

وزن الشخص الواحد هو ٨٠ كجم

الوزن الكلي للأشخاص هو ٨٠ س

أقصى حمولة للمصعد هي ٥٠٠ كجم

يجب أن يكون الوزن الكلي للأشخاص أصغر من أو يساوي **أقصى حمولة للمصعد**

نعبّر عن ذلك بالمتباينة : ٨٠ س ≥ ٥٠٠

المتباينة : هي جملة رياضية (تعبير رياضي) تربط بين أعداد أو مقادير بإحدى العلاقات (الرموز) : > ، < ، ≥ ، ≤

نعلم أنَّ : ٣ > ٢ ونفس المعنى ٢ < ٣

كذلك ٣ + ٤ > ٢ + ٤ ، ٣ - ١ > ٢ - ١

٣ × ٥ > ٢ × ٥ ولكن ٣ × -٢ < ٢ × -٢

خواص المتباينات : إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا نسبية وكانت أ > ب فإنَّ :

١ أ + جـ > ب + جـ

٢ أ - جـ > ب - جـ

٣ أ × جـ > ب × جـ ، جـ > ٠ (جـ عدد موجب) .

٤ أ × جـ < ب × جـ ، جـ < ٠ (جـ عدد سالب) .

تذكَّرْ أنَّ :
العبارات التي تدل على المتباينات
- أقل من ، أصغر من (>)
- أكبر من أكثر من (<)
- أقل من أو يساوي (≥)
- على الأكثر ، لا يزيد على (≥)
- أكبر من أو يساوي (≤)
- على الأقل ، لا يقل عن (≤)

معلومات مفيدة :
يستخدم النجارون المتباينات لإيجاد العدد الأكبر من الخزائن التي يريدون صنعها إذا كان لديهم كمية محددة من الخشب .

مثال :

حل المتباينات التالية :

أ ٣م < ٩ ، م ∈ ط

الحل :

$\frac{٣م}{٣} < \frac{٩}{٣}$

م < ٣

م ∈ {٢ ، ١ ، ٠}

∴ مجموعة الحل =

{٢ ، ١ ، ٠}

ب ٣م < ٩ ، م ∈ ص

الحل :

$\frac{٣م}{٣} < \frac{٩}{٣}$

م < ٣

م ∈ {٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، ...}

∴ مجموعة الحل =

{٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، ...}

جـ ٣م ≤ ٩ ، م ∈ ص

الحل :

$\frac{٣م}{٣} \le \frac{٩}{٣}$

م ≤ ٣

م ∈ {٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ...}

∴ مجموعة الحل =

{٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ...}

تذكَّرْ أنَّ :

- النظير الجمعي للعدد أ هو (-أ) بحيث أ + (-أ) = ٠
- النظير الضربي للعدد أ هو $\frac{١}{أ}$ بحيث أ × $\frac{١}{أ}$ = ١

فكِّر وناقِش

من المثال السابق قالت نورة : أنَّني لا أستطيع أن أكتب مجموعة الحل بذكر العناصر إذا كانت م ∈ ح . فهل ما تقوله نورة صحيح ؟ فسّر إجابتك .

تذكَّرْ أنَّ :

خطوات حل المتباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد تطابق خطوات حل المعادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد.

تدرّب (١) :

اكتب أول خطوة تجريها في حل كل متباينة من المتباينات التالية :

أ ص + ٥ ≤ -٣

ص + ٥ - ٥ ≤ -٣ - ٥

ب ٢م < ٩

$\frac{٢م}{٢} < \frac{٩}{٢}$

جـ ٤ك - ٣ < $\frac{٢}{٥}$

٤ك - ٣ + ٣ < $\frac{٢}{٥}$ + ٣

تدرّب (٢) :

حل المتباينة : م + ٥ > ٠ ، م ∈ ح .

م + ٥ - ٥ > ٠ - ٥ إضافة النظير الجمعي

م > -٥

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من -٥

تدرب (٣) :

حل المتباينات التالية حيث س ∈ ℚ :

أ) ٢ س + ٣ ≤ ١

٢س + ٣ − ٣ ≤ ١ − ٣

العملية العكسية :

٢س ≤ −٢

$\frac{٢س}{٢} \le \frac{-٢}{٢}$

العملية العكسية :

س ≤ −١

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من أو تساوي −١

ب) $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{١}{٢}$ > $\frac{٣}{٢}$

$\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{١}{٢}$ > $\frac{٣}{٢}$

$\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ > $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$

$\frac{٢}{٣}$ س > $\frac{٤}{٢}$

$\frac{٣}{٢}$ × $\frac{٢}{٣}$ س > $\frac{٤}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$

س > ٣

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأصغر من ٣

فكِّر وناقِش

يقول أحمد : أنَّني أستطيع حل تدرب (٣) (ب) بطريقة أخرى وهي ضرب طرفي المتباينة في المضاعف المشترك الأدنى (م . م . أ) للمقامات ، هل توافقه الرأي ؟ فسّر إجابتك .

تدرب (٤) :

حل المتباينات التالية حيث س ∈ ℚ :

أ) $\frac{س}{٣}$ > $\frac{-٥}{٣}$

٣ × $\frac{س}{٣}$ > ٣ × $\frac{-٥}{٣}$

س > −٥

∴ حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الأكبر من −٥

ب) ٢س + ٢,٥ ≤ س

٢ س + ٢,٥ − س ≤ س − س

س + ٢,٥ ≤ ٠

س + ٢,٥ − ٢,٥ ≤ ٠ − ٢,٥

س ≤ −٢,٥

حل المتباينة هو مجموعة الأعداد النسبية الاصغر من او تساوي −٢,٥

تدرّب (٥) :

عند الضرب في عدد سالب تغير رمز التباين

أ حل المتباينة ٤ − ٣ س < − ٨ حيث س ∈ ص :

٤ − ٣ س − ٤ < − ٨ − ٤

− ٣ س < − ١٢

(− $\frac{١}{٣}$) × (− ٣ س) > (− $\frac{١}{٣}$) × − ١٢

س > ٤ ⟸ حل المتباينة مجموعة الاعداد الصحيحة الاكبر من ٤

ب حل المتباينة ٥ ص − ٣ ≤ ٤ + ٢ ص حيث ص ∈ ص :

٥ ص − ٣ − ٢ ص ≤ ٤ + ٢ ص − ٢ ص

٣ ص − ٣ ≤ ٤ + ٠

٣ ص + (− ٣) + ٣ ≤ ٤ + ٣

٣ ص ≤ ٧

$\frac{١}{٣}$ × ٣ ص ≤ ٧ × $\frac{١}{٣}$

ص ≤ ٢ $\frac{١}{٣}$ ⟸ حل المتباينة مجموعة الاعداد الصحيحة الاكبر من او تساوي ٢ $\frac{١}{٣}$

تدرّب (٦) :

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، من البيانات المدونة عليه أوجد مجموعة قيم س التي تجعل مساحة المثلث أصغر من ٤٨ وحدة مربعة .

مساحة المثلث < ٤٨

$\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ س < ٤٨

١٢ × س < ٤٨

$\frac{١}{١٢}$ × ١٢ × س < ٤٨ × $\frac{١}{١٢}$

س < ٤

∴ مجموعة قيم س التي تجعل مساحة المثلث أصغر من ٤٨ وحدة مربعة هي :

١ ، ٢ ، ٣ الاكبر من صفر والاصغر من ٤

تدرّب (٧) :

س = ٧ يمثل أحد الحلول المتباينة :

(أ) س − ٥ > ١ | (ب) ٩ − س ≥ ١ | (ج) ٢ س ≤ ٥ | (د) ٣ س > ٢٧

تمــرَّنْ :

١ حل كلًّا من المتباينات التالية في ن :

أ ٢ص + ٤ ≥ ١٩

٢ص + ٤ − ٤ ≥ ١٩ − ٤

٢ص ≥ ١٥

ص ≥ ١٥/٢

ص ≥ ٧ ١/٢

حل المتباينة مجموعة الاعداد النسبية الاصغر من او تساوي ٧ ١/٢

ب ٢س + ٣ > ١٥

٢س + ٣ − ٣ > ١٥ − ٣

٢س > ١٢

س > ١٢/٢

س > ٦

حل المتباينة الاعداد النسبية الاكبر من ٦

جـ ب − ١/٢ > ٢ ١/٣

ب − ١/٢ + ١/٢ > ٢ ١/٣ + ١/٢

ب > ٢ ٢/٦ + ٣/٦

ب > ٢ ٥/٦

حل المتباينة الاعداد النسبية الاكبر من ٢ ٥/٦

د ٥م − ٣,٤ ≤ ١,١

٥م − ٣,٤ + ٣,٤ ≤ ١,١ + ٣,٤

٥م/٥ ≤ ٤,٥/٥

م ≤ ٠,٩

حل المتباينة الاعداد النسبية الاكبر من او تساوي ٠,٩

هـ ٥ − ٣س > −١

٥ − ٥ − ٣س > −١ − ٥

−٣س/−٣ > −٦/−٣

س < ٢

حل المتباينة الاعداد النسبية الاصغر من ٢

و −٣ ≥ ٤ص − ٥

−٣ + ٥ ≥ ٤ص − ٥ + ٥

٢/٤ ≥ ٤ص/٤

١/٢ ≥ ص

حل المتباينة الاعداد النسبية الاكبر من او تساوي ١/٢

ز ١٠ (س − ٥) > ٧ (٦ − س)

١٠س − ٥٠ > ٤٢ − ٧ س

١٠س + ٧س − ٥٠ > ٤٢ − ٧س + ٧س

١٧س − ٥٠ > ٤٢

١٧س > ٩٢

س > $\frac{٩٢}{١٧}$

ص المتباينة الاعداد النسبية الاكبر من $\frac{٩٢}{١٧}$

ح ٢س + ٤ ≥ ٣ (س + ١)

٢س + ٤ ≥ ٣س + ٣

٢س − ٣س ≥ ٣ − ٤

−س ≥ −١

س ≤ ١

ص المتباينة الاعداد النسبية الاكبر من او تساوي ١

٢ أوجد طول ضلع مربع الذي يجعل محيط المربع أكبر من محيط مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٨ وحدة طول .

طول المربع = س   محيط المربع = ٤ س

محيط المثلث متطابق الاضلاع = ٣ × ٨ = ٢٤ وحدة طول

$\frac{٤س}{٤} > \frac{٢٤}{٤}$ ⇐ س > ٦

ص المتباينة الاعداد الطبيعية الاكبر من ٦

TIMSS 2019 ٣ إذا كانت : ٢,٥ ≥ س ≥ ٧,٥ ، ٤,٥ ≥ ص ≥ ٦,٥ ،
فما هي أصغر قيمة للمقدار : س − ٢ص ؟

(أ) −١٠,٥   (ب) −٦   (ج) ١٠,٥   (د) ١١,٥

TIMSS 2019 ٤ إذا كانت : −٤ ≥ س ≥ ١ ، −٦ ≥ ص ≥ ٤ ،
فما أعلى قيمة للمقدار : $س^٢ − ص^٢$ ؟

(أ) ١٦   (ب) ٢٤   (ج) ٣٠   (د) ٣٦

TIMSS 2019 ٥ س هو عدد إذا جمعنا له العدد ٦ وضربنا الناتج في ٧ نحصل على عدد أكبر من ٤١ . أي من المتباينات التالية تصف هذه المعطيات ؟

(أ) ٧ س + ٦ > ٤١   (ب) ٧ س > ٣٥   (ج) ٧ س × ٦ > ٤١   (د) ٧ (س + ٦) > ٤١

١٠-٧ مراجعة الوحدة العاشرة
Revision Unit Ten

١ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) لما يلي :

أ ٧ $س^٢$ ص ، ١٤ س $ص^٢$

ع.م.أ = ٧ س ص

ب ٦ $س^٧$ ص ، ٥س ص

ع.م.أ = س ص

٢ حلّل المقادير التالية بإيجاد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) :

أ ١٥$س^٢$ + ٩ س

ع.م.أ = ٣ س

٣ س (٥ س + ٣)

ب ٣ س − $س^٢$ ص + ١٥ $س^٣$ $ص^٥$

ع.م.أ = س

س (٣ − س ص + ١٥ $س^٢$ $ص^٥$)

٣ حلّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^٢$ − ٩

(س − ٣) (س + ٣)

ب (س − ١ $)^٢$ − ٤

(س − ١ − ٢) (س − ١ + ٢)

(س − ٣) (س + ١)

٤ حل المعادلات التالية حيث س ، ص ∈ ح :

أ $\frac{ص}{٢}$ − ٣ = ١٥

$\frac{ص}{٢}$ − ٣ + ٣ = ١٥ + ٣

$\frac{ص}{٢}$ = ١٨ × ٢

ص = ٣٦

ب (س − ١) (س + ٣) = ٠

س − ١ = ٠ | س + ٣ = ٠

س = ١ | س = −٣

م.ح = { ١ ، −٣ }

جـ $س^٢$ = ٨١

$س^٢$ − ٨١ = ٠

(س − ٩) (س + ٩) = ٠

س − ٩ = ٠ | س + ٩ = ٠

س = ٩ | س = −٩

م.ح = { ٩ ، −٩ }

د (س − ص $)^٢$ − ٤ = ٠

(س − ٣ − ٢) (س − ٣ + ٢) = ٠

(س − ٥) (س − ١) = ٠

اما س − ٥ = ٠ س − ١ = ٠

س = ٥ س = ١

م.ح = { ٥ ، ١ }

٥ حل المتباينات التالية حيث س ∈ ص :

أ ٢س − ٣ < ١٧

٢س − ٣ + ٣ < ١٧ + ٣

٢س < ٢٠

٢س/٢ < ٢٠/٢ ⟸ س < ١٠

حل المتباينة الاعداد النسبية الأكبر من ١٠

ب ١ − ٥ س < ٦

١ − ١ − ٥س < ٦ − ١

−٥س/−٥ > ٥/−٥

س < −١

حل المتباينة الاعداد النسبية الأكبر من −١

TIMSS 2019 ٦ إذا كان لشركة تأجير السيارات تعريفة أساسية قدرها ٢٥ دينار و ٠,٢ دينار عن كل كيلومتر تقطعها سيارة الأجرة .
فأيّ مما يلي يمثل التكلفة بالدينار لكي تستقل سيارة الأجرة لرحلة بمسافة س كيلومتر ؟

أ ٠,٢ س + ٢٥ ب ٠,٢ س × ٢٥

ج (س + ٢٥) × ٠,٢ د س + ٢٥ × ٠,٢

TIMSS 2019 ٧ المتباينة −٢س < ٦ تكافئ :

أ س < ١٢ ب س < $-\frac{١}{٢}$ ج س > −٣ د س < ٣

TIMSS 2019 ٨ إذا كان س + ص = ٣٥ ، وكان كل من س ، ص عددًا صحيحًا موجبًا يقبل القسمة على العدد ٥ ، وكان س > ص فإنَّ إحدى قيم س الممكنة هي :

أ ٢٠ ب ٢٥ ج ٣٠ د ٣٥

اختبار الوحدة العاشرة

أوّلًا : في البنود (١ – ٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) بين ٦ س^{٢} ص ، ٢ س^{٣} ص^{٢} هو ٦ س^{٣} ص^{٢}	(أ)	(ب)
٢ ٢س + ٤س^{٢} = ٢س (١ + ٢ س)	(أ)	(ب)
٣ مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٢٥ = ٠ ، حيث س ∈ ط ، هي {–٥ ، ٥}	(أ)	(ب)
٤ حل المتباينة – ٥ س > ٢٠ هو س > – ٤	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ المقدار $\frac{٨ س^{٥} ص^{٢}}{٢ س^{٥} ص^{٧}}$ في أبسط صورة هو :

(أ) ٦ س^{٥} ص^{٥} (ب) $\frac{٤}{ص^{٥}}$ (ج) ٤ ص^{٥} (د) ٦ ص^{٥}

٦ العدد الذي يمثل حلًّا للمعادلة (س – ٣)^{٢} = ٠ (حيث س ∈ ح) هو :

(أ) صفر (ب) –٣ (ج) ٣ (د) ٦

TIMSS 2019

٧ اشترى هشام كتابًا و ٥ دفاتر بثمن ١٣٥ زد ، إذا علم أنَّ ثمن الكتاب يبلغ ٤ أضعاف ثمن الدفتر الواحد ، فما ثمن الكتاب ؟

(أ) ١٥ زد (ب) ٨٠ زد (ج) ٦٠ زد (د) ٤٥ زد

٨ حل المتباينة ٢ س < ١٠ (حيث س ∈ ن) هو :

أ كل الأعداد النسبية الأصغر من ٥
ب كل الأعداد النسبية الأكبر وتساوي ٥
ج كل الأعداد النسبية الأصغر وتساوي ٥
د كل الأعداد النسبية الأكبر من ٥

---

٩ مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} = -٤$ (حيث س ∈ ن) هو :

أ ٢ أو -٢
ب ٤ أو -٤
ج مجموعة خالية
د كل الأعداد النسبية الأكبر من -٤

---

١٠ تحليل المقدار ٤ + ٤ ك هو :

أ ٨ ك
ب ٤
ج ك
د ٤ (١ + ك)

الوحدة الحادية عشرة

الهندسة والقياس

Geometry and Measurement

الزراعة
Agriculture

مشروع الوحدة : (مساحات زراعية)

الزراعة هي النواة الرئيسية التي ما زال الإنسان يُطورها بالعلم والمعرفة ويرعاها بالجد والعمل والسعي إلى اكتشاف آفاق جديدة وتطوير وتحسين جميع جوانبها ومجالاتها سعيًا إلى المزيد من الإنتاج والمزيد من الفوائد لأنَّ الزراعة تُعد أحد المصادر الأساسية للدخل وأسلوب حياة إنساني ووسيلة للتحكم والسيطرة على الأسواق العالمية .

خطة العمل :

تُشجع دولة الكويت المواطنين على ممارسة الأنشطة الزراعية ، ففي الصورة أمامك جزء من منطقة زراعية زرعت عدة أنواع وكل نوع محاط بشكل هندسي . كل مجموعة تقوم بتوظيف مفاهيم المساحات غير المنتظمة في إيجاد المساحة الكلية لهذه الأرض الزراعية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- ارسم مزرعتك الخاصة كما في الشكل المقابل ، استخدم ٣ إلى ٥ أشكال هندسية وأعطِها قياسات مناسبة .
- أوجد مساحة الأشكال الهندسية المرسومة .
- أوجد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية كلها .

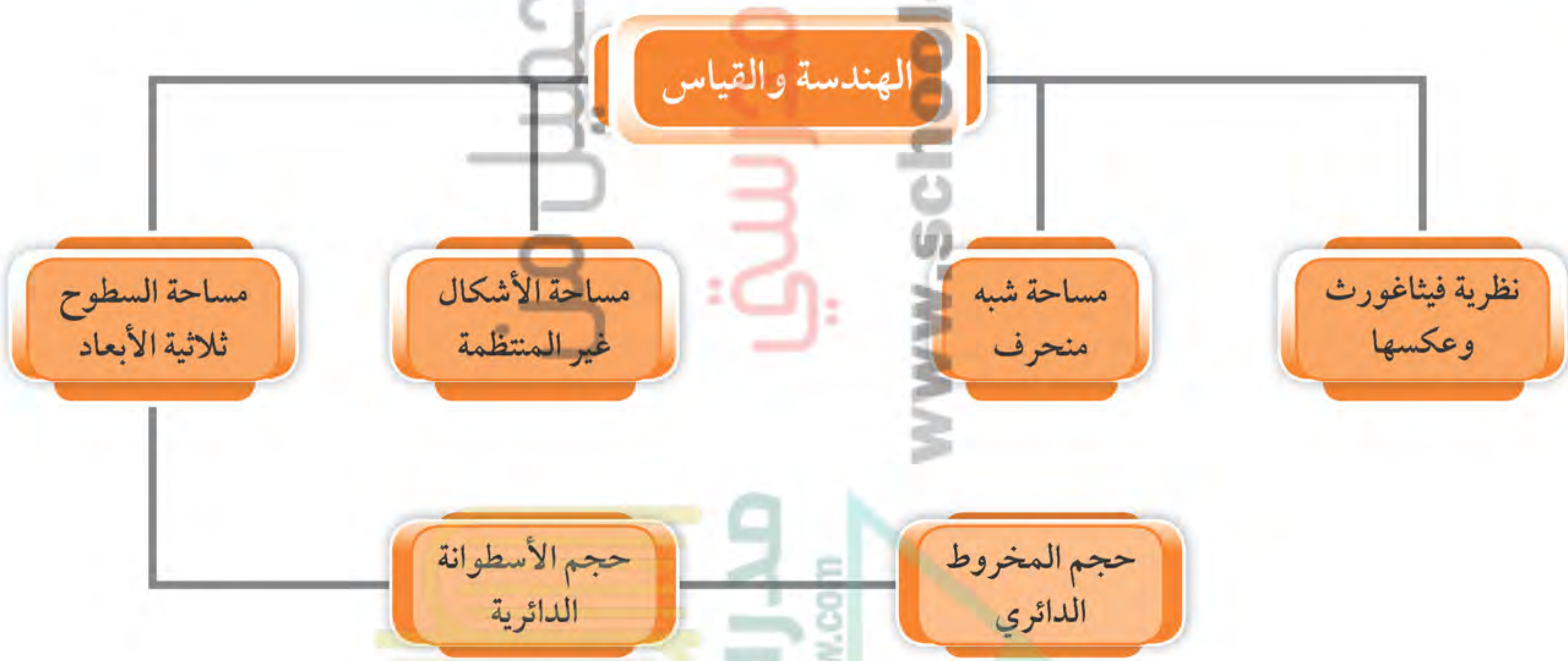
علاقات وتواصل :

- تبادل الرسومات والحسابات التي أوجدتها كل مجموعة .
- تتحقق كل مجموعة من صحة حل المجموعة الثانية .

عرض العمل :

- تُقدم كل مجموعة المُخطط (الرسم) الهندسي والمساحة الكلية للمشروع .
- وتعرض الإجابات للتحقق من الحل .

مخطّط تنظيمي للوحدة الحادية عشرة

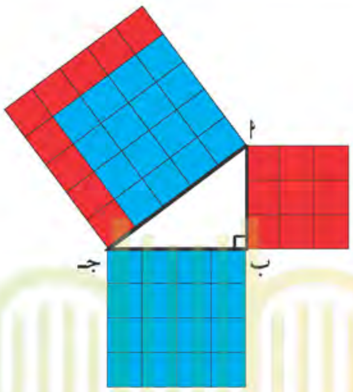


١١-١ نظرية فيثاغورث وعكسها
Pythagorean Theorem and its Reciprocal

العبارات والمفردات :
نظريّةُ فيثاغورث
Pythagorean Theorem
عكسُ نظريّةِ فيثاغورث
Reciprocal of Pythagorean Theorem

سوف تتعلّم : نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها .

نشاط (١) :



في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب بحيث أ ب = ٣ وحدة طول ، ب جـ = ٤ وحدة طول ، من الرسم وباستخدام الوحدات المربعة ، أكمل الجدول التالي :

المثلث	أطوال الأضلاع	مربعاتها	ماذا تلاحظ ؟
أ ب جـ قائم الزاوية في ب	ضلع القائمة : أ ب = ٣ وحدات طول	^{2}(أ ب) = ٩	٩ + ١٦ = ٢٥
	ضلع القائمة : ب جـ = ٤ وحدات طول	^{2}(ب جـ) = ١٦	
	الوتر : أ جـ = ٥ وحدات طول	^{2}(أ جـ) = ٢٥	

معلومات مفيدة :
يستخدم عاملو البناء نظرية فيثاغورث لتشييد جدران مستوية .

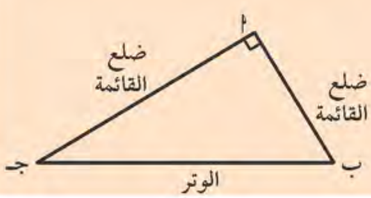
الاستنتاج :

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ⟸ ^{2}(أ جـ) = ^{2}(أ ب) + ^{2}(ب جـ)

نظرية فيثاغورث : في المثلث القائم الزاوية يكون مربع طول الوتر مساويًا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ⟸

^{2}(ب جـ) = ^{2}(أ ب) + ^{2}(أ جـ)

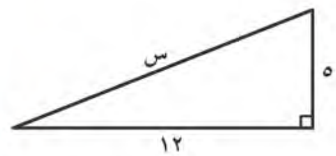


تذكر أنَّ :
في المثلّثات قائمة الزاوية ضلعا القائمة هما الضلعان اللذان يشكلان الزاوية القائمة ، والوتر هو أطول ضلع في المثلّث وهو الضلع المقابل للزاوية القائمة .

تدرّب (١) :

أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :

أ



$\text{س}^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}$

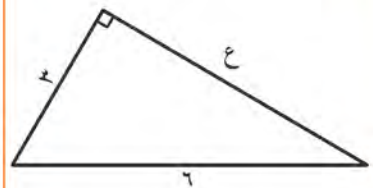
$\text{س}^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\text{س} = \sqrt{١٦٩}$

$\text{س} = ١٣$

ب



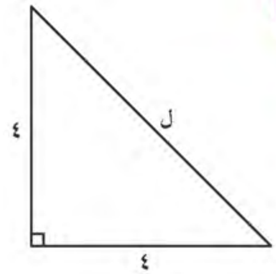
$(٦)^{٢} = (\text{ع})^{٢} + (٣)^{٢}$

$٣٦ = (\text{ع})^{٢} + ٩$ (العملية العكسية)

$\text{ع}^{٢} = ٣٦ - ٩ = ٢٧$

$\text{ع} = \sqrt{٢٧}$

جـ



$\text{ل}^{٢} = (٤)^{٢} + (٤)^{٢}$

١٦ + ١٦

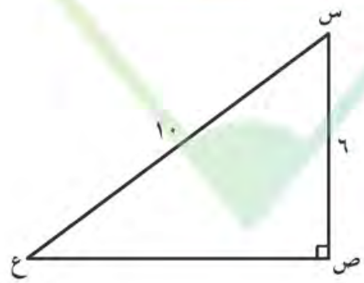
$\text{ل} = \sqrt{٣٢}$

تدرّب (٢) :

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = ٦ وحدة طول ، س ع = ١٠ وحدة طول .

أوجد ص ع .



المعطيات : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص   س ص = ٦   س ع = ١٠

المطلوب : إيجاد ص ع

البرهان : ∵ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص

∴ $(\text{س ع})^{٢} = (\text{س ص})^{٢} + (\text{ص ع})^{٢}$

$١٠^{٢} = ٦^{٢} + (\text{ص ع})^{٢}$ (باستخدام العملية العكسية)

$(\text{ص ع})^{٢} = ١٠٠ - ٣٦$

∴ $\text{ص ع} = \sqrt{٦٤} = ٨$ وحدات طول

معلومات مفيدة :

الجهات الأصلية .

تدرّب (٣) :

إذا كانت المدينة (ب) تقع شرق المدينة (أ) بمسافة ١٥ كم وكانت المدينة (جـ) تقع في شمال المدينة (أ) بحيث تبعد عن المدينة (ب) مسافة ٢٥ كم . أوجد المسافة بين المدينتين (أ) ، (جـ) .

المعطيات : أ ب = ١٥ كم ، ب جـ = ٢٥ كم

المطلوب : إيجاد أ جـ

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

∴ (ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 + (أ ب)^2

(٢٥)^2 = (أ جـ)^2 + (١٥)^2

(أ جـ)^2 = ٦٢٥ − ٢٢٥ = ٤٠٠ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

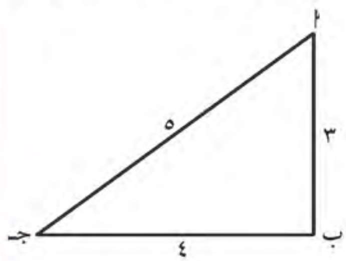
∴ أ جـ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠

∴ المسافة بين المدينتين (أ) ، (جـ) هي ٢٠ كم

نشاط (٢) :

اللوازم : منقلة

في ما يلي عدة مثلثات معلوم أطوال أضلاعها . قارن بين مربع أكبر الأضلاع طولًا ، ومجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .في كل من المثلثات التالية باستخدام المنقلة حاول التعرف على قياس الزاوية المقابلة لأكبر الأضلاع طولًا (بالقياس) .



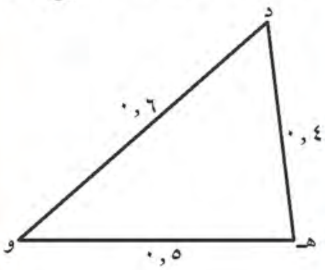
(أ جـ)^2 = ٢٥

(أ ب)^2 + (ب جـ)^2

= ٩ + ١٦

ماذا تلاحظ ؟ أ جـ^2 = أ ب^2 + ب جـ^2

ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°



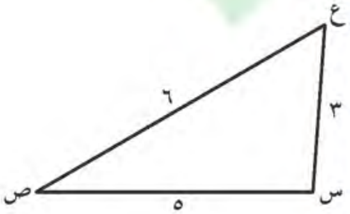
(د و)^2 = ٠,٣٦

(د هـ)^2 + (هـ و)^2

= ٠,١٦ + ٠,٢٥ = ٠,٤١

ماذا تلاحظ ؟ د و^2 < د هـ^2 + هـ و^2

ق ($\hat{هـ}$) ≠ ٩٠°



(ع ص)^2 = ٣٦

(ع س)^2 + (س ص)^2

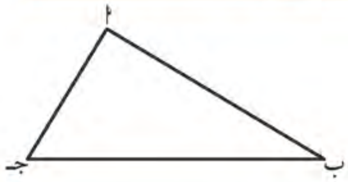
= ٩ + ٢٥ = ٣٤

ماذا تلاحظ ؟ ع ص^2 > ع س^2 + س ص^2

ق ($\hat{س}$) ≠ ٩٠°

مما سبق نصل إلى ما نسميه عكس نظرية فيثاغورث :

عكس نظرية فيثاغورث : إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساويًا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين ، فإنَّ هذا المثلث قائم الزاوية .



إذا كان $(ب\,جـ)^2 = (أ\,جـ)^2 + (أ\,ب)^2$ ، فإنَّ :

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ .

ملاحظة :

$(ب\,جـ)^2 = (أ\,جـ)^2 + (أ\,ب)^2 \Longleftrightarrow \Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية في أ .

تدرّب (٤) :

في الحالات التالية : ابحث في ما إذا كانت الأطوال المعطاة يمكن أن تمثل أطوالًا لمثلث قائم الزاوية .

أ ٥ وحدة طول ، ١٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة طول

$(13)^2 = 169$

$(5)^2 + (12)^2$

$= 25 + 144 = 169$

ماذا تلاحظ ؟ تمثل مثلث قائم

ب ٥ وحدة طول ، ٥ وحدة طول ، ٧ وحدة طول

$(7)^2 = 49$

$(5)^2 + (5)^2$

$= 25 + 25 = 50$

ماذا تلاحظ ؟ لا تمثل مثلث قائم

جـ ٥ وحدة طول ، ٧ وحدة طول ، ٩ وحدة طول

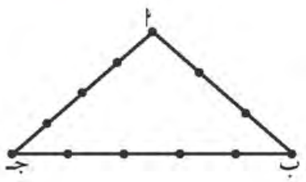
$(9)^2 = 81$

$(5)^2 + (7)^2$

$= 25 + 49 = 74$

ماذا تلاحظ ؟ لا تمثل مثلث قائم

تدرّب (٥) :



استخدم المصريون القدامى أحبالًا ذات عقد تكون مثلثًا تبلغ أطوال أضلاعه بوحدات الطول ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي لمساعدتهم على تشكيل الزوايا القائمة أثناء بناء الأهرامات .

وضح كيف يعمل هذا النظام .

مربع طول الضلع الأطول $(ب\,جـ)^2 = (5)^2 = 25$

مربعا طولي الضلعين الآخرين $(4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$

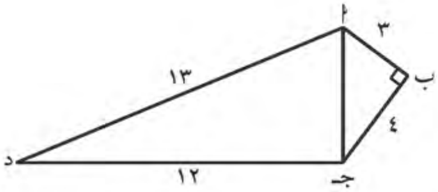
نلاحظ أنَّ : $(ب\,جـ)^2 = (أ\,جـ)^2 + (أ\,ب)^2$

$\therefore (ب\,جـ)^2 = (أ\,جـ)^2 + (أ\,ب)^2$

$\therefore$ النظام يكوّن زاوية قائمة الزاوية

مثال :

في الشكل المقابل : ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ،
أ ب = ٣ وحدة طول ، ب جـ = ٤ وحدة طول ،
جـ د = ١٢ وحدة طول ، أ د = ١٣ وحدة طول .
احسب طول $\overline{أجـ}$ ، ثم أثبت أن Δ أ جـ د قائم الزاوية .



الحلّ :

المعطيات : (١) ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، أ ب = ٣ وحدة طول ، ب جـ = ٤ وحدة طول ،
جـ د = ١٢ وحدة طول ، أ د = ١٣ وحدة طول .

المطلوب : (١) إيجاد طول $\overline{أجـ}$.
(٢) إثبات أنَّ Δ أ جـ د قائم الزاوية .

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في $\hat{ب}$

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

في Δ أ جـ د : (أ د)^{٢} = (١٣)^{٢} = ١٦٩ ،

(جـ د)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}

= ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

∵ (١٣)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}

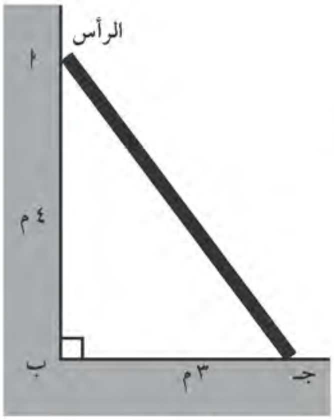
∴ (أ د)^{٢} = (جـ د)^{٢} + (أ جـ)^{٢}

∴ مربع طول الضلع الأكبر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

∴ المثلث أ جـ د قائم الزاوية في جـ .

تدرّب (٦) :

سلم يرتكز على حائط رأسي بحيث تبعد قمته عن سطح الأرض بمقدار ٤ أمتار ، وتبعد قاعدة السلم عن الحائط ٣ أمتار . أوجد طول السلم .



المعطيات : أب = ٤ م ، جـ ب = ٣ م

المطلوب : طول السلم

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

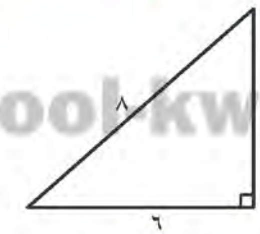
(أ جـ)^{٢} = ٤^{٢} + ٣^{٢} = ٢٥ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

∴ طول السلم = ٥ أمتار

تمــرَّنْ :

١ أ أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :



س^{٢} = ٨^{٢} − ٦^{٢}

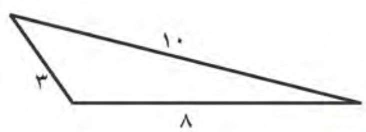
= ٦٤ − ٣٦ = ٢٨

س = $\sqrt{٢٨}$

ص^{٢} = ١^{٢} + ١^{٢} = ٢

ص = $\sqrt{٢}$

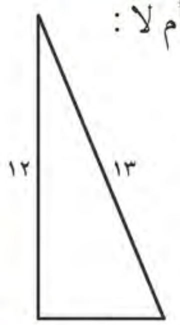
ب في كلٍّ ممّا يلي ، حدّد ما إذا كان المثلّث قائم الزاوية أم لا :



١٠^{٢} = ١٠٠

٨^{٢} + ٣^{٢} = ٦٤ + ٩ = ٧٣

١٠٠ > ٧٣ لا تمثل مثلث قائم

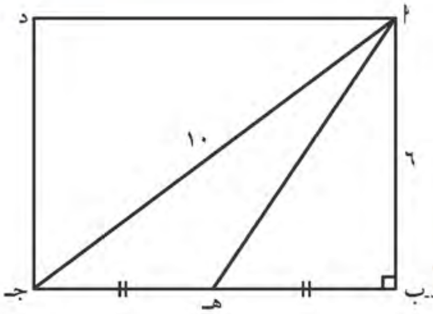


١٣^{٢} = ١٦٩

٥^{٢} + ١٢^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

١٦٩ = ١٦٩

تمثل مثلث قائم



٢ أ ب جـ د مستطيل فيه :
أ جـ = ١٠ وحدة طول ، أ ب = ٦ وحدة طول ،
هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. أوجد بالبرهان طول كل
من : $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$.

المعطيات : أ ب جـ د مستطيل ، أ جـ = ١٠ ، أ ب = ٦

المطلوب : إيجاد $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$

البرهان : أ ب جـ د مستطيل ، ق(∠ب) = ٩٠°

△ أ ب جـ قائم في ب ⇐ ب جـ² = أ جـ² − أ ب² = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤ ⇐ ب جـ = √٦٤ = ٨

هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ⇐ ب هـ = ½ × ٨ = ٤

أ هـ² = أ ب² + ب هـ² = ٣٦ + ١٦ = ٥٢ ⇐ أ هـ = √٥٢

---

٣ ساعة حائط طول مؤشر الساعات فيها ٦ وحدة طول ، بينما
طول مؤشر الدقائق ٨ وحدة طول . أوجد المسافة بين
طرفي المؤشرين عند تمام الساعة الثالثة .

عند الساعة الثالثة تكون العقارب قائمة

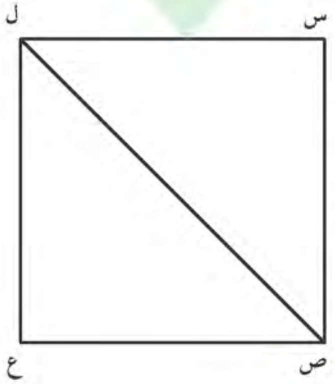
المسافة بين طرفي العقارب تمثل الوتر

المسافة = ٨² + ٦² = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

المسافة = √١٠٠ = ١٠ وحدات طول

---

٤ تبلغ مساحة فناء مربع الشكل ٨١ وحدة مربعة
ويتضمن ممرًّا قطريًّا .



أ أوجد طول ضلع الفناء . √٨١
= ٩ وحدات طول

ب أوجد طول الممر القطري .
ل ص² = ل ع² + ص ع²

٩² + ٩² = ٨١ + ٨١ = ١٦٢

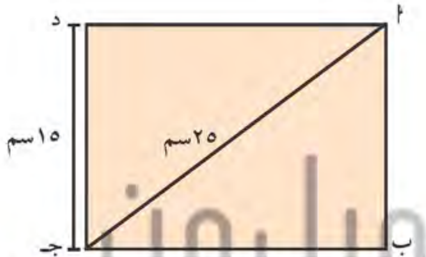
ل ص = √١٦٢ وحدة طول

TIMSS 2019 ⑤ تحدّد كلّ مجموعة من الأعداد التالية أطوال أضلاع مثلث .
حدّد المجموعة التي لا تناسب المجموعات الأخرى ؟

Ⓐ ٣ ، ٤ ، ٥   Ⓑ ٣ ، ٥ ، ٧   Ⓒ ١٢ ، ٣٥ ، ٣٧   Ⓓ ٦ ، ٨ ، ١٠

(أ) ٣ ، ٤ ، ٥   (ب) ٣ ، ٥ ، ٧   (جـ) ١٢ ، ٣٥ ، ٣٧   (د) ٦ ، ٨ ، ١٠

⑥ يصنّف مغلف البريد الذي على شكل مستطيل بأنّه كبير إذا تجاوز طوله ٣٠ سم .
هل المغلّف التالي كبير ؟ وضّح إجابتك

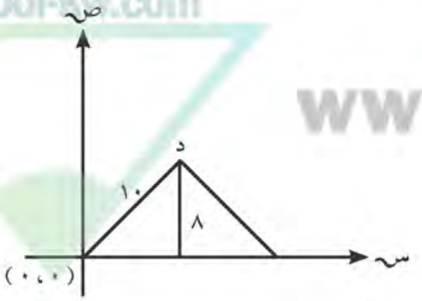


$(أد)^2 = (أجـ)^2 - (دجـ)^2 = (٢٥)^2 - (١٥)^2$

$= ٦٢٥ - ٢٢٥ = ٤٠٠$

$أد = \sqrt{٤٠٠} = ٢٠$ سم

TIMSS 2019 ⑦ إحداثي النقطة د هو:



(أ) (٨ ، ٦)   (ب) (٦ ، ٨)   (جـ) (٨ ، ١٠)   (د) (١٠ ، ٨)

١١-٢ مساحة شبه المنحرف
Area of Trapezoid

سوف تتعلّم : إيجاد مساحة شبه المنحرف .

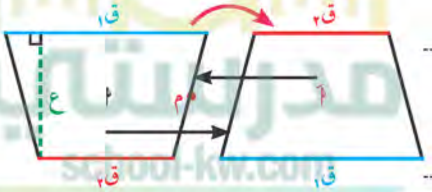
نشاط :

أراد مُزارع أن يضع مُلصقًا دعائيًّا على سلة من سعف النخيل أوجهها على شكل شبه منحرف ، فاستعان بابنه أحمد ليُساعده في ذلك وطلب منه الآتي :

خذ زوجًا مُتطابقًا من شبه المنحرف ودور أحدهما ١٨٠° حول م ، وألصق البطاقتين ببعضهما بعضًا كما هو موضح في الشكل .

اللوازم :
- زوج متطابق من شبه المنحرف على ورق مُقوى .
- شريط لاصق قلم - ورقة

سوف نتعلّم من نشاط المزارع وابنه أحمد كيفية حساب مساحة شبه المنحرف .



١ ما اسم الشكل الناتج ؟ متوازي اضلاع

٢ ما العلاقة بين مساحة شبه المنحرف ومساحة الشكل الناتج ؟ $م_1 = \frac{1}{2} م$

٣ ما العلاقة بين ارتفاع وطول قاعدة الشكل الناتج ، وارتفاع وطول قاعدة شبه المنحرف ؟ الارتفاع نفسه ، طول قاعدة متوازي الاضلاع يساوي مجموع طول القاعدة الصغرى والكبرى معاً بشبه المنحرف

فكر في استنتاج قاعدة لحساب مساحة شبه المنحرف باستخدام الارتفاع وطول القاعدة .

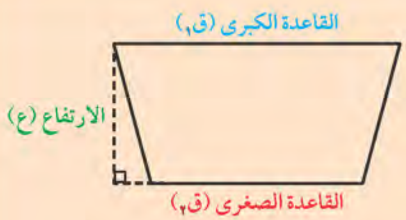
معلومات مفيدة :
سعف النخيل عبارة عن أوراق شجرة النخيل المركبة وهي ريشيّة الشكل ، طولها يتراوح ما بين ٣ - ٦ أمتار تقريبًا وتنتج النخلة ما بين العشرة والعشرين سعفة في السنة .

مما سبق نجد أنَّ :

مساحة شبه المنحرف

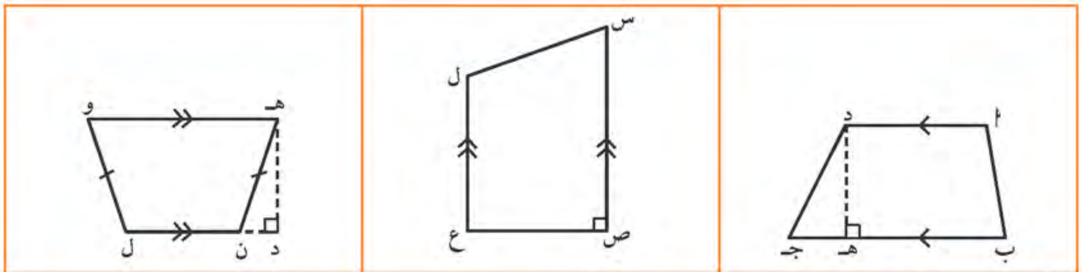
$$= \frac{\text{مجموع طولي القاعدتين}}{٢} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{(ق_1 + ق_2)}{٢} \times ع$$



تدرّب (١) :

سمِّ القاعدتين والارتفاع في كل شكل مما يلي :



$ق_1$	ب جـ	س ص	هـ و
$ق_2$	أ د	ل ع	ن ل
ع	د هـ	ص ع	هـ د

تدرّب (٢) :

أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د .

$$م = \frac{(ق_1 + ق_2)}{٢} \times ع$$

$$= \frac{(٦ + ٨)}{٢} \times ٤$$

$$= ٧ \times ٤$$

$$\therefore م = ٢٨$$

تدرّب (٣) :

أوجد مساحة شبه المنحرف الذي فيه :

أ $ق_1$ = ٧ وحدة طول

$ق_2$ = ٥ وحدة طول

ع = ٦ وحدة طول

$$م = \left(\frac{ق_1 + ق_2}{٢}\right) \times ع$$

$$\therefore م = \frac{١٢ \times ٦}{٢} = ٣٦$$ وحدة مربعة

ب $ق_1$ = ٦,٣ وحدة طول

$ق_2$ = ٣,٧ وحدة طول

ع = ٧ وحدة طول

$$م = \left(\frac{ق_1 + ق_2}{٢}\right) \times ع$$

$$\therefore م = \frac{٦,٣ \times ٣,٧}{٢} \times ٧ = ٣٥$$ وحدة مربعة

تدرّب (٤) :

أوجد ارتفاع شبه منحرف مساحته ١٦ وحدة مربعة وطول القاعدتين فيه ٣ وحدة طول ، ٥ وحدة طول .

$$م = \left(\frac{ق_1 + ق_2}{2}\right) \times ع$$

$$16 = \left(\frac{3 + 5}{2}\right) \times ع$$

$$16 \times 2 = 8 \times ع$$

$$\therefore ع = \frac{32}{8} = 4$$ وحدات طول

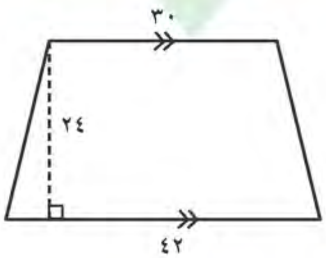
تمـــرَّنْ :

١ طاولة على شكل شبه منحرف طولا ضلعيها : المتوازيين ٢,٦ وحدة طول ، ١,٤ وحدة طول والبعد العمودي بين الضلعين ٠,٥ . أوجد مساحة الطاولة .

مساحة الطاولة = مساحة شبه المنحرف

$$= \frac{ق_1 + ق_2}{2} \times ع = \frac{1,4 \times 2,6}{2} = \frac{4}{2} \times 0,5 = 1$$ وحدة مربعة

٢ يبين الشكل المجاور حديقة منزلية على شكل شبه منحرف يراد زراعتها بالعشب الطبيعي ، إذا كان سعر الوحدة المربعة من العشب الطبيعي ١٢ دينارًا ، فكم تكلف زراعة الحديقة بالعشب ؟



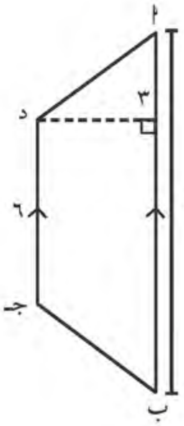
مساحة الحديقة = مساحة شبه المنحرف

$$= \frac{ق_1 + ق_2}{2} \times ع = \frac{30 + 42}{2} \times 24 = \frac{72}{2} \times 24$$

$$= 36 \times 24 = 864$$

تكلفة زراعة الحديقة = ٨٦٤ × ١٢ = ١٠٣٦٨ دينار

٣ في الشكل المقابل أب جـ د شبه منحرف مساحته ٣٦ وحدة مربعة . فيه أهـ = ٣ ، أب = ١٢ ، د جـ = ٦
أوجد كلاً من د هـ ، أد .



$\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{ق_1 + ق_2}{2} \times ع$

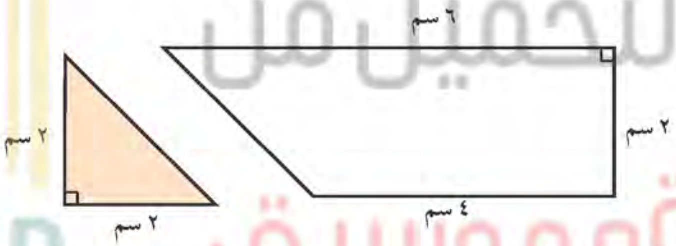
$٣٦ = \frac{٦ + ١٢}{2} \times ع$

$٣٦ \times ٢ = ١٨ \times ع \Leftarrow ع = \frac{٣٦ \times ٢}{١٨} = ٤$

د هـ = ٤ وحدات طول

△ أهـ د فيه ق(أهـ د) = ٩٠ ⟸ أد² = أهـ² + د هـ² = ٩ + ١٦ = ٢٥ ⟸ أد = ٥ وحدات طول

TIMSS 2019
٤ إذا استخدمنا المثلث المظلّل كوحدة لقياس مساحة شبه المنحرف ، فإنَّ هذه المساحة تساوي :



(أ) ٣ مثلثات (ب) ٤ مثلثات (جـ) ٥ مثلثات (د) ٦ مثلثات

TIMSS 2019
٥ أب جـ د شبه منحرف ، س ص ع ل شبه منحرف آخر مطابق له (له الشكل والمساحة نفسها)

فإذا كان ق ($\hat{س}$) = ق ($\hat{أ}$) = ٧٠° ،

فإنَّ العبارة الصحيحة فيما يلي هي :

(أ) س ص = أب

(ب) مساحة المنطقة س ص ع ل < مساحة المنطقة أب جـ د

(جـ) أطوال أضلاع الشكل س ص ع ل متطابقة

(د) محيط الشكل س ص ع ل = ٣ أمثال محيط الشكل أب جـ د .

١١-٣ حلُّ المسائلِ : مساحةُ الأشكالِ غيرِ المنتظِمةِ
Problem Solving : Area of Irregular Figures

معلومات مفيدة :
يستخدم مهندسو التخطيط العمرانيّ الأشكال الهندسيّة غير المنتظمة عند التخطيط لبناء منازل جديدةٍ .

سوف تتعلّم : إيجاد مساحة الأشكال غير المنتظمة .

نشاط :

يُمثِّل الشكل الموضَّح قطعة أرض في إحدى ملاعب الجولف الخاصّة الصغيرة . تريد صاحبة الملعب أن تكسوَ المنطقة المحددة بعشب جديد .

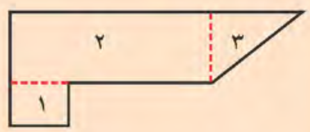
١ أوجد الأطوال المجهولة س ، ص ، واشرح كيف أوجدْت أطوالها .

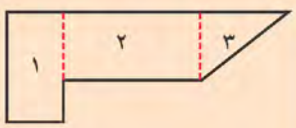
٢ ارسم قطعًا مستقيمة أفقيّة أو رأسيّة أو مائلة لتقسم الشكل إلى أشكال هندسية مألوفة .

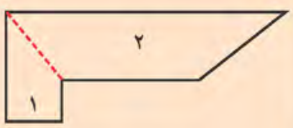
٣ أوجد مساحة كل شكل هندسي على حدى ، ثمّ أوجد مساحة قطعة الأرض الكلّيّة .

٤ قسِّم قطعة الأرض إلى أشكال هندسية بطريقة مختلفة ، ثمّ أوجد المساحة الكلّيّة . هل حصلت على المساحة نفسها ؟

يمكنك إيجاد مساحة شكلٍ هندسيٍّ غير منتظمٍ عن طريق تقسيم الشكل إلى أجزاء هي عبارة عن أشكال هندسيّةٍ مألوفة لديك ، ثمَّ القيام بجمع مساحات هذه الأجزاء . توجد عادةً طرق مختلفة لتقسيم الشكل غير المنتظم .

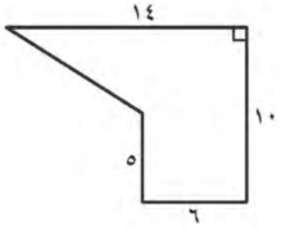






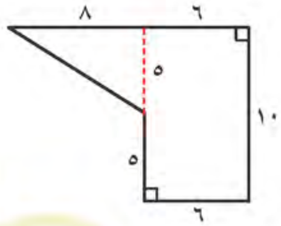
مثال (١) :

أوجد مساحة الشكل المقابل .



الحلّ :

يمكن تقسيم الشكل إلى مستطيل ومثلّث .



لإيجادِ مساحةِ المستطيلِ :

م = الطول × العرض

م = ١٠ × ٦

م = ٦٠ وحدة مربعة

لإيجاد مساحة المثلّث :

م = $\frac{١}{٢}$ ق × ع

م = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٥

م = ٢٠ وحدة مربعة

∴ مساحة الشكل الكليّة = مساحة المستطيل + مساحة المثلّث

= ٦٠ + ٢٠

= ٨٠ وحدة مربعة

∴ مساحة الشكل الكليّة = ٨٠ وحدة مربعة .

تذكر أنّ :

- مساحة الشكلِ تعني مساحةَ منطقة الشكلِ .
- مساحة المثلّث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدةِ × الارتفاع

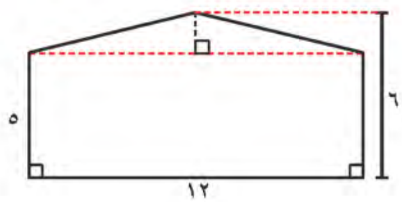
- مساحة المستطيل = الطول × العرض

- مساحة المربّع = طول الضلع × نفسه

- مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

تدرّب (١) :

أوجِد مساحة الشكلِ المجاور .



مساحة المستطيل = ١٢ × ....

مساحة المثلّث = (١٢ × ....) ÷ ٢

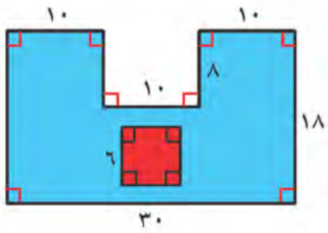
مساحة الشكل = ... + ... =

أحيانًا تحتاجُ إلى أن تلجأ إلى عمليّة الطرح لإيجاد مساحة بعض الأشكال الهندسيّة .

مثال (٢) :

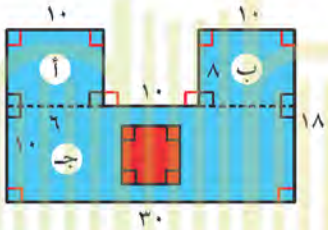
أوجد مساحة الشكل الكلّيّة ، ثمّ أوجد مساحة الجزء الملوّن بالأزرق .

اقسِم الشكل إلى ٣ مستطيلات .



الحلّ :

مساحة المستطيل (أ)	مساحة المستطيل (ب)
م = ل × ض	م = ل × ض
م = ١٠ × ٨	م = ١٠ × ٨
م = ٨٠ وحدة مربعة	م = ٨٠ وحدة مربعة



مساحة المستطيل (جـ)

م = ل × ض

م = ٣٠ × ١٠

م = ٣٠٠ وحدة مربعة

∴ مجموع مساحة المستطيلات الثلاثة = ٨٠ + ٣٠٠ + ٨٠ = ٤٦٠ وحدة مربعة

∴ مساحة المربّع = ل^{٢} = ٦^{٢} = ٣٦ وحدة مربعة

∴ مساحة الجزء المطلوب = ٤٦٠ − ٣٦ = ٤٢٤ وحدة مربعة .

تدرّب (٢) :

إحدى الحدائق العامّة على شكل مستطيل أبعاده ٢٠ وحدة طول ، ٣٠ وحدة طول . تتوسّط الحديقة بركة ماء دائريّة الشكل ، طول نصف قطرها ٥ وحدة طول . يحيط ببركة الماء ممرٌّ دائريٌّ عرضه وحدة طول واحدة . أراد المسؤولون عن الحديقة زرع المساحة الباقية من الحديقة بالزهور . ما مساحة المنطقة التي سيتمُّ زرعُها ؟ (اعتبر π = ٣,١٤) .

تذكر أنَّ :
مساحة الدائرة = π نق^{٢}

الحلّ :

مساحة المستطيل = ٢٠ × .... = ...

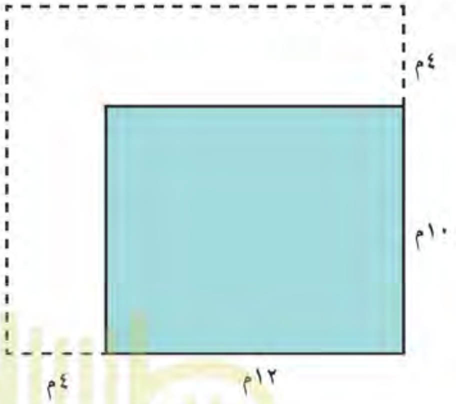
مساحة البركة مع الممرّ = ٣,١٤ × (............ + ...)^{٢} = ...

الباقي = ٦٠٠ − .... = ...

∴ تبلغ مساحة المنطقة التي سيتمُّ زرعها .... وحدة مربّعة .

TIMSS 2019 **التحدّي :**

١ لدى حسام حديقة مستطيلة الشكل ، قام بإضافة ٤ م إلى كل من الطول والعرض كما هو مبين في الشكل . ما مقدار المساحة الإضافية للحديقة ؟



(أ) ١٦ م^{٢} (ب) ١٠٤ م^{٢}

(جـ) ١٢٠ م^{٢} (د) ٢٢٤ م^{٢}

٢ تمّ تقسيم المربع المجاور إلى خمسة أجزاء ، اختر العبارة الصحيحة مما يلي :

(أ) مساحة الجزء (١) > مساحة الجزء (٢) + مساحة الجزء (٥)

(ب) مساحة الجزء (١) < مساحة الجزء (٢) + مساحة الجزء (٥)

(جـ) مساحة الجزء (١) = مساحة الجزء (٢) + مساحة الجزء (٥)

(د) مساحة الجزء (١) < مساحة الجزء (٥) – مساحة الجزء (٢)

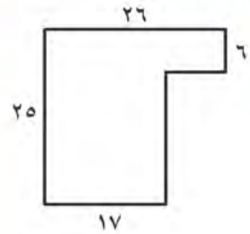
٣ خمسة مربّعات وضعت بجانب بعضها بحيث أصبح محيطها ٧٢ سم ، فما طول ضلع المربّع ؟

(أ) ١٢ سم (ب) ٨ سم (جـ) ١٠ سم (د) ٦ سم

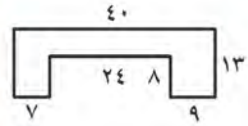
تمـــرَّنْ :

١ أوجد مساحة كلّ شكل من الأشكال التالية :

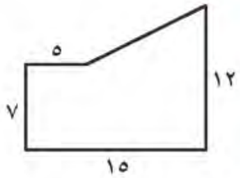
أ



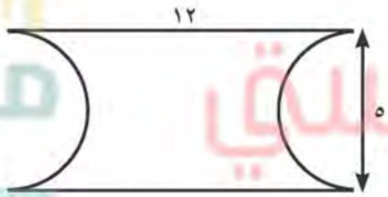
ب



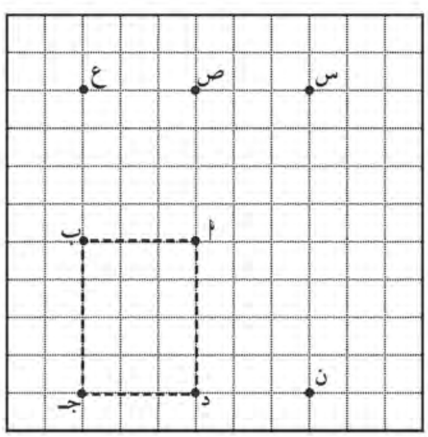
جـ



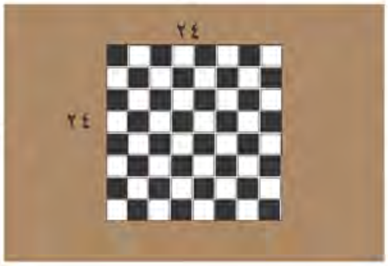
٢ في الشكل رقعة مستطيلة الشكل اقتُطِع منها نصفا دائرة . أوجد مساحة المنطقة الباقية .



٣ TIMSS 2019 اعتمادًا على النقاط المرسومة ، ارسم مثلثًا مساحته ضعف مساحة المستطيل (ﺃ ب جـ د) فسر اجابتك .



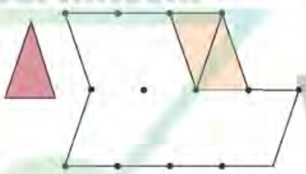
٤ طاولة على شكلٍ مستطيلٍ أبعادُها ٤٨ وحدة طول ، ٣٠ وحدة طول ، موضوع على سطحها في المنتصفِ رقعة شطرنجٍ مربّعة طول ضلعها ٢٤ وحدة طول .
ما مساحة الطاولة غير المغطّاة برقعة الشطرنجِ ؟



٥ حائط أبعاده ٤ وحدة طول ، ٣ وحدة طول ، وفيه شبّاك أبعادُه ٢ وحدة طول ، ١,٥ وحدة طول . ما مساحة ورق الحائط اللازم لتغطية هذا الحائط ؟

TIMSS 2019 ٦ يقوم عامل بتغطية جزء من الأرضية باستخدام بلاطة مثلثة الشكل

أ استكمل تغطية الشكل بالبلاطات ، ثم احسب عدد البلاطات اللازمة لتغطية الشكل .

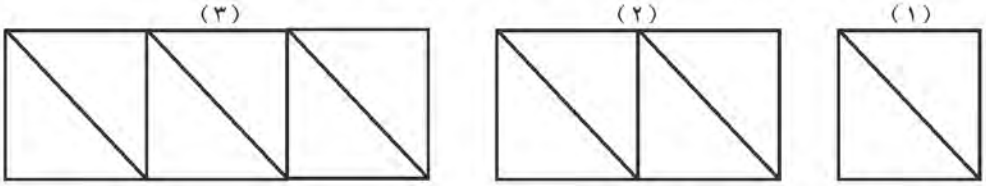


عدد البلاطات يساوي ....

ب إذا كانت مساحة البلاطة الواحدة ٢٥ سم^{2} ، فما مساحة الشكل ؟ وضّح إجابتك .

مساحة الشكل تساوي ....

TIMSS 2019 ٧ تم ترتيب المثلثات القائمة الزاوية لتكوّن النمط المبين ، إذا كانت مساحة كل مثلث منها تساوي ١٢ سم^{2} ، فأوجد مساحة الشكل الخامس .



مساحة الشكل الخامس تساوي ....

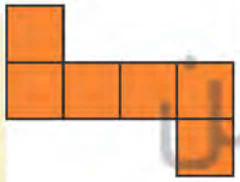
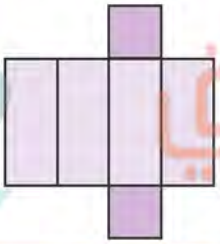
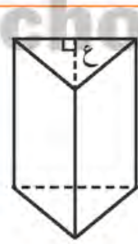
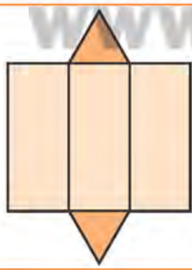
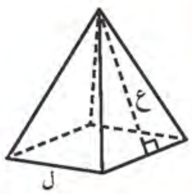
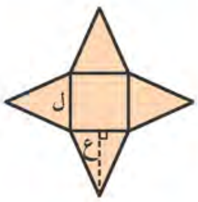
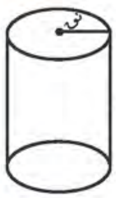
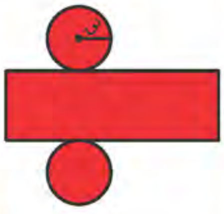
اكتب القاعدة : ....

١١-٤ مساحةُ السطوح (ثلاثية الأبعاد)
Surface Area (3 D)

سوف تتعلّم : إيجاد مساحة سطح المجسم المتعدد السطوح .

نشاط (١) :

مما سبق دراسته أكمل الجدول التالي :

اسم	المجسم	الشبكة للمجسم	قانون المساحة السطحية
مكعب	 ل		٦ × مساحة المربع = ٦ × $ل^2$
شبه مكعب	 ع ض ل		٢ × (مساحة القاعدة) + ٢ × (مساحة الوجه ١) + ٢ × (مساحة الوجه ٢) = ٢(ض × ل) + ٢(ل × ع) + ٢(ع × ض)
منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع	 ع		٢ × مساحة المثلث + ٣ × مساحة المستطيل = ٢ × $\frac{1}{2}$ × ق × ع + ٣(ل × ع)
هرم رباعي قاعدته مربعة الشكل	 ع ل	 ل ع	مساحة القاعدة (المربع) + ٤ × مساحة السطح الجانبي الواحد (المثلث) = $ل^2$ + ٤ × $\frac{1}{2}$ × ق × ع
أسطوانة دائرية قائمة	 نق ع	 نق ع	٢ × مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحة السطح الجانبي (المستطيل) = ٢(π $نق^2$) + ٢π نق ع

العبارات والمفردات :

مجسّم متعدد الأوجه Polyhedron

وجه Face

حرف Edge

رأس Vertex

مساحة سطحيّة Surface Area

منشور Prism

قاعدة Base

أسطوانة Cylinder

معلومات مفيدة :

يستخدمُ مصمِّمو الديكوراتِ الداخليّةِ المساحةَ السطحيّةَ لتحديدِ كمّيّةِ الموادِّ اللازمةِ لتغطيةِ الأشياءِ المجسَّمةِ .

تذكر أنّ :

المنشور القائم هو منشور حروفه الجانبيّة متعامدة مع قاعدتيه.

نشاط (٢) :

بالرجوع إلى النشاط (١):

المساحة السطحية للمنشور القائم المرسوم

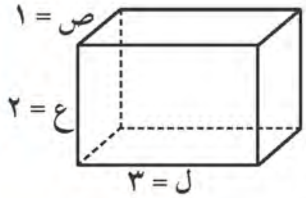
= ٢ (ل × ع) + ٢ (ض × ع) + ٢ (ل × ض)

بأخذ ٢ و ع عامل مشترك من الحد الأول والثاني :

= ٢ × ع (ل + ض) + (٢ × ل × ض)

= ٢ (ل + ض) × الارتفاع + ٢ مساحة القاعدة

= **محيط القاعدة × الارتفاع + ٢ مساحة القاعدة**



تذكر أنَّ :
- محيط المستطيل = ٢ × (ل + ض)
- مساحة المستطيل = ل × ض

المساحة الجانبية للمنشور الرباعي القائم = محيط القاعدة × الارتفاع

مثال (١) :

أوجد المساحة السطحيّة للمنشور القائم الذي أبعاده : ١ وحدة طول ، ٢ وحدة طول ، ٣ وحدة طول .

الحلّ :

المساحة السطحية للمنشور القائم =

٢ (ل × ع) + ٢ (ض × ع) + ٢ (ل × ض)

بأخذ ٢ و ع عامل مشترك من الحد الأول والثاني :

= ٢ × ع (ل + ...) + (٢ × .... × ....)

= ٢ (ل + ض) × الارتفاع + ٢ مساحة القاعدة

= **محيط القاعدة × الارتفاع + ٢ مساحة القاعدة**

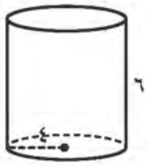
= ٢ (٣ + ١) × ٢ + ٢ × ٣ × ١

= ٢ × ٤ × ٢ + ٦

= ١٦ + ٦

= ٢٢ وحدة مربعة

نشاط (٣) :



بالرجوع إلى النشاط (١):

مساحة سطح الأسطوانة الجانبي = محيط القاعدة

= ٢ مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحة المستطيل (مساحة السطح المنحنى للأسطوانة (٢ π نق ع))

= ٢ π نق^{٢} + ٢ π نق ع

بأخذ ٢ π نق عامل مشترك

م = ٢ π نق (نق + ع)

المساحة السطحية للأسطوانة الدائرية القائمة = ٢ π نق (نق + ع)

> **تذكر أنَّ :**
> - محيط الدائرة = ٢ π نق
> - مساحة الدائرة = π نق^{٢}

مثال (٢) :

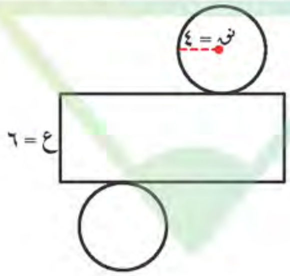
أوجِدْ المساحة السطحية للأسطوانة . (باعتبار π = ٣,١٤)

الحلّ :

مساحة سطح الأسطوانة الجانبي = محيط القاعدة

= ٢ مساحة القاعدة (الدائرة) + مساحة المستطيل (مساحة السطح المنحنى للأسطوانة (٢ π نق ع))

= ٢ π نق^{٢} + ٢ π نق ع



بأخذ ٢ π نق عامل مشترك

م = ٢ π نق (نق + ع)

المساحة السطحية = ٢ π نق (نق + ع)

= ٢ × ٣,١٤ × ٤ (٤ + ٦)

= ٢٥١,٢ وحدة مربعة

تدرّب (١) :

إذا أردنا طلاء خزان الناقلة الموضح بالشكل بدهان يتكلف المتر المربع منه ٤ دنانير .
فكم يكلف دهان الخزان؟ (باعتبار π = ٣,١٤)

مساحة سطح الخزان = ٢ π نق (نق + ع)

= ٢ × ٣,١٤ × ١,٢ × (١,٢ + ٦,٣)

= ٢ × ٣,٧٦٨ (١,٢ + ٦,٣)

= ٧,٥٣٦ × ٧,٥

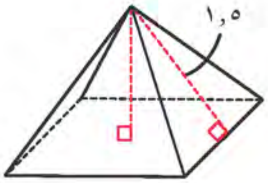
= ٥٦,٥٢ م٢

تكلفة دهان الخزان = ٥٦,٥٢ × ٤ = ٢٢٦,٠٨ دينار

فكِّر وناقِش

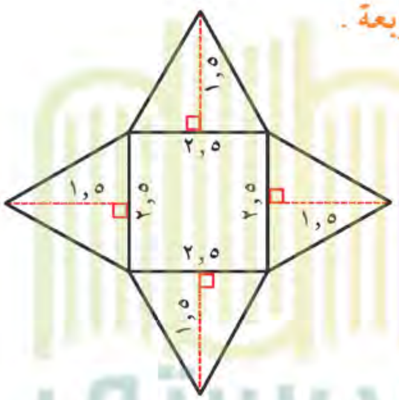
إذا كانت الأسطوانة من غير قاعدتين ، فما المساحة السطحية لها ؟

مثال (٢) :



يُستخدم في إحدى المسرحيّات التي تدور أحداث قصتها في مصر نموذج لهرم منتظم رباعي القاعدة . ومساحة قاعدته ٦,٢٥ وحدة طول مربعة . إذا كان ارتفاع الوجه الجانبي ١,٥ وحدة طول ، فأوجد المساحة السطحيّة لهذا الهرم .

الحلّ :



بما أنَّ قاعدة الهرم هي مربّع مساحته ٦,٢٥ وحدة طول مربعة .

إذًا طول ضلع المربّع = $\sqrt{٦,٢٥}$ = ٢,٥ وحدة طول

يتضمّن الهرم ٤ أوجه مثلّثيّة متطابقة.

مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × (٢,٥ × ١,٥) = ١,٨٧٥ وحدة مربعة

∴ المساحة السطحيّة للهرم = ٦,٢٥ + ٤ × ١,٨٧٥

= ١٣,٧٥ وحدة مربعة .

تمــرَّنْ :

١ ما الفرق بين المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه ٥ وحدة طول وشبه مكعب أبعاده ٣ وحدة طول ، ٤ وحدة طول ، ٧ وحدة طول .

م١ = مساحة سطح المكعب = ٦ ل٢ = ٦ × ٥٢ = ١٥٠ وحدة مربعة

م٢ = مساحة سطح شبه المكعب = ٢ × [(٣ × ٤) + (٣ × ٧) + (٤ × ٧)]

= ٢ × ٦١ = ١٢٢

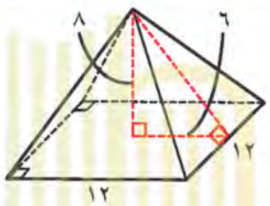
م١ − م٢ = ١٥٠ − ١٢٢ = ٢٨

٢ في إحدى المدن الكبرى فندق أسطوانيّ الشكل طول قطر قاعدته الدائرية ٣٥ وحدة طول وارتفاعه ٥٠ وحدة طول . تمت تغطية السطح المنحني بالزجاج . ما مساحة الزجاج الذي يُغطّي السطح الجانبي للفندق ؟ (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

مساحة الزجاج = مساحة الاسطوانة الجانبية = ٢ط نق ع

$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٧,٥ \times ٥٠ = \frac{٢٢}{٧} \times ١٧٥٠ = ٥٥٠٠$ وحدة مربعة

٣ أ ما نوع الهرم المبيَّن في الشكل ؟



هرم رباعي القاعدة

ب ما ارتفاع هذا الهرم ؟

٨ وحدات طول

جـ ما مساحة الوجه المثلّثيّ ؟ طول وتر المثلث الاحمر = $\sqrt{٦٤ + ٣٦} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

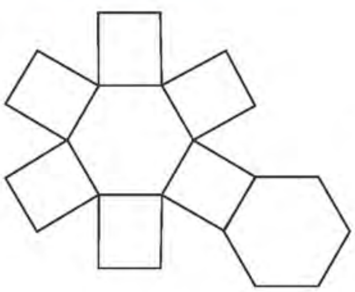
$\frac{١}{٢} \times$ ق $\times$ ع $= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٠ = ٦ \times ١٠ = ٦٠$

د ما المساحة السطحيّة للهرم ؟

مساحة القاعدة + ٤ × مساحة احد الاوجه

١٢ × ١٢ + ٤ × ٦٠ = ١٤٤ + ٢٤٠ = ٣٨٤ وحدة مربعة

TIMSS 2019 ٤ من خلال الشبكة المرسومة أكمل:



أ اسم المجسم :

منشور سداسي قائم

ب عدد الأسطح الجانبية =

٦ اوجه

حجم الأسطوانة الدائرية – حجم المخروط الدائري
Volume of Cylinder and cone

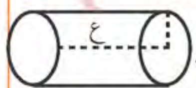
١١-٥

سوف تتعلّم : إيجاد حجم الأسطوانة وحجم المخروط .

معلومات مفيدة : تكون الطرود المرسَلة أحيانًا على شكل منشور أو أسطوانة ، ويُحدّدُ حجمُ الطردِ مقدار الحيّز اللازم لشحنه.

نشاط (١) :

أكمل الجدول التالي :

الشكل	اسم المنشور القائم	مساحة القاعدة للشكل	حجم الشكل (رمزيًّا)	الحجم (لفظيًّا)
 ل	مكعب	ل × ل	ل × ل × ل	الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع
 ع ض ل	شبه المكعب	ل × ض	ل × ض × ع	الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع
 نق ع	أسطوانة	π نق^{2}	π نق^{2} ع	مساحة القاعدة × الارتفاع

تذكر أنَّ :
- مساحة المربع = ل × ل = ل^{2}
- مساحة المستطيل = ل × ض
- حجم المكعب = ل × ل × ل = ل^{3}
- حجم شبه المكعب = ل × ض × ع

يمكن إيجاد حجم المنشور القائم باستخدام القانون التالي :

حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة (م) × الارتفاع (ع) (لفظيًّا)

ح = م × ع (رمزيًّا)

مساحة قاعدة أيِّ أسطوانة م = π نق^{2} ، حيث نق = طول نصف القطر . بالتالي :

حجم الأسطوانة (ح) = م × ع = (π نق^{2}) × ع

تذكر أنّ :

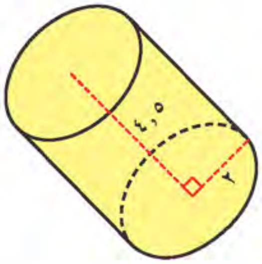
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ نصف طول القاعدة × الارتفاع

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

مثال (١) :

أوجد حجم الأسطوانة المبيَّنة في الشكل المجاور : (اعتبر π = ٣,١٤)

الحلّ :



أوجد أوّلًا مساحة القاعدة (م) :

م = π نق^{٢}

م = ٣,١٤ (٢)^{٢} = ١٢,٥٦ وحدة مربعة

استخدم م لإيجاد الحجم :

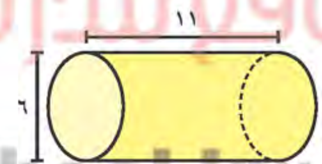
ح = م × ع = ١٢,٥٦ × ٤,٥ = ٥٦,٥٢ وحدة مكعبة

∴ الحجم = ٥٦,٥٢ وحدة مكعبة .

تدرّب (١) :

أوجد حجم كلِّ أسطوانة .

أ



استخدم π = ٣,١٤

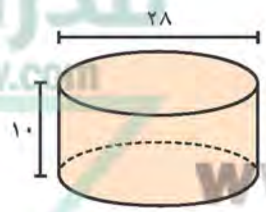
حجم الأسطوانة = م × ع

= π نق^{٢} × ع

= ٣,١٤ × ٣ × ٣ × ١١

= ٣,١٤ × ٩٩ = ٣١٠,٨٦ وحدة مكعبة

ب



استخدم π = $\frac{٢٢}{٧}$

حجم الأسطوانة = π نق^{٢} × ع

= ....

= $\frac{٢٢}{٧}$ × $\cancel{١٤}^{٢}$ × ١٤ × ١٠

= ٤٤ × ١٤٠ = ٦١٦٠ وحدة مكعبة

اللوازم :

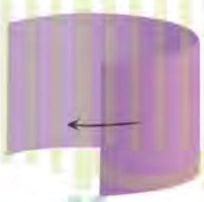
- أكواب وأقماع
- مقصّ
- شريط لاصق
- مسطرة
- ورق مقوًّى
- فرجار
- رمل ملون

نشاط (٢) :

١ استخدم الفرجار لترسم دائرةً طول نصف قطرها ١٠ وحدة طول ، واستخدم المسطرة لترسم نصف قطر هذه الدائرة ، ثمّ قصّ الدائرة .

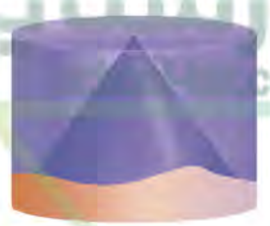
٢ قصّ الورقة عند نصف القطر الذي رسمته .

٣ أمسك أحد طرفي الخطّ الذي قطعت عنده ولفّه بحيث تصنع مخروطًا . استخدم الشريط اللاصق لتثبيت المخروط .



٤ قس ارتفاع هذا المخروط وسجّله .

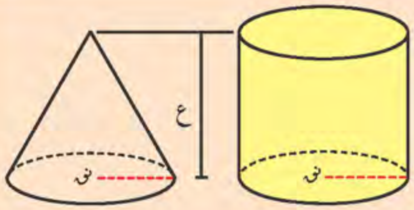
٥ قص مستطيلًا ارتفاعه مساوٍ لارتفاع المخروط ، واصنع منه أسطوانة على أن يكون قطر قاعدتها مساويًا لقطر قاعدة المخروط .



٦ املأ المخروط بالرمل الملون ، ثمّ اسكبه في الأسطوانة . كرّر هذه العمليّة بعد ذلك مرّتين .

٧ ماذا تلاحظ عن كمّيّة الرمل في الأسطوانة في نهاية المرحلة الثالثة ؟ اشرح إجابتك .

٨ ناقش مع زملائك العلاقة بين حجم الأسطوانة وحجم المخروط .

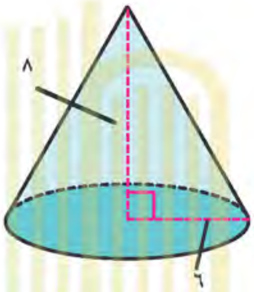


حجم المخروط هو $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع .

ح $_{\text{مخروط}}$ = $\frac{١}{٣}$ × (م × ع) = $\frac{١}{٣}$ × (π نق^{٢} × ع) ،

حيث م مساحة القاعدة ، ع الارتفاع .

مثال (٢) :



أوجد حجم المخروط المبيّن في الشكل المجاور :

(اعتبر π = ٣,١٤)

الحل :

أوجد أوّلًا مساحة القاعدة الدائريّة (م) :

م = π نق^{٢}

م = ٣,١٤ × ٦^{٢} = ١١٣,٠٤ وحدة مربعة

استخدِم م لإيجاد الحجم :

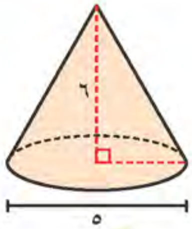
ح = $\frac{١}{٣}$ × (م × ع)

ح = $\frac{١}{٣}$ × (١١٣,٠٤ × ٨) = ٣٠١,٤٤ وحدة مكعبة

∴ الحجم = ٣٠١,٤٤ وحدة مكعبة .

فكِّر وناقِش

قال جمال إنَّ حجم المخروط يساوي ثلث حجم أي أسطوانة . فهل ما قاله جمال صحيح ؟ وضّح ذلك .



تدرّب (٢) :

أوجد حجم المخروط المبيّن في الشكل المجاور :

(اعتبر π = ١٤ , ٣)

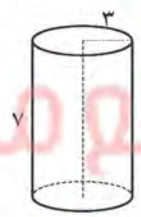
حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣,١٤ × ٢,٥ × ٢,٥ × ٦ = ٦,٢٨ × ٦,٢٥

= ٣٩,٢٥ وحدة مكعبة

تمــرَّنْ :

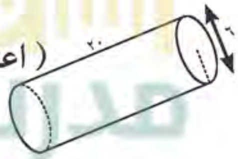
أوجد حجم كلّ مجسم مما يلي :

١  (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣ × ٣ × ٧

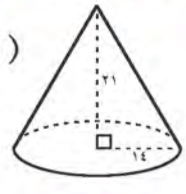
= ٢٢ × ٩ = ١٩٨

٢  (اعتبر π = ١٤ , ٣)

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

= ٣,١٤ × ٣ × ٣ × ٢٠

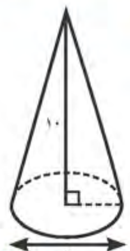
= ٣,١٤ × ١٨٠ = ٥٦٥,٢

٤  (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ × ٢١

= ٤٤ × ٩٨ = ٤٣١٢

٥  (اعتبر π = ١٤ , ٣)

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π × نق^{٢} × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣,١٤ × ٣ × ٣ × ١٠

= ٣ × ٣,١٤ = ٩٤,٢

٥ صومعة (مخزن) للغلال على شكل أسطوانة ارتفاعها ٩ أمتار ، وطول قطرها ٤,٢ أمتار ، ما عدد الأمتار المكعبة التي يمكن للصومعة تخزينها ، مقربًا الناتج إلى أقرب م^{٣} ؟ (اعتبر π = ٣,١٤)

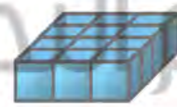
حجم الصومعة = حجم الاسطوانة = π نق^{٢} ع

= ٣,١٤ × ٢,١ × ٢,١ × ٩

= ٢٨,٢٦ × ٤,٤١ = ١٢٤,٦٢٦٦ ≈ ١٢٥ م^{٣}

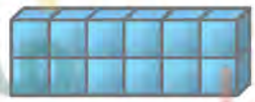
TIMSS 2019 ٦ جميع المكعّبات الصغيرة التالية لها نفس الحجم ،

أي مجسم من المجسمات التالية له حجم مختلف عن باقي المجسمات ؟

أ 

ب 

جـ 

د 

TIMSS 2019 ٧ يقلب الشكل التالي في وضعيات مختلفة .

أي من الأشكال التالية يمكن أن يمثل هذا الشكل السابق بعد قلبه ؟

أ 

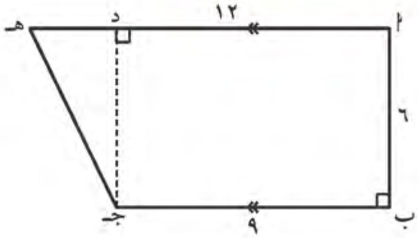
ب 

جـ 

د 

١١-٦ مراجعة الوحدة الحادية عشرة
Revision Unit Eleven

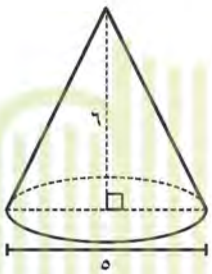
١ أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ هـ المرسوم أمامك .



ع × $\frac{ق_١ + ق_٢}{٢}$ = ٦ × $\frac{١٢ + ٩}{٢}$ = ٢١ × ٣

= ٦٣

٢ أوجدْ حجم المخروط المرسوم أمامك . (اعتبر π = ٣,١٤)

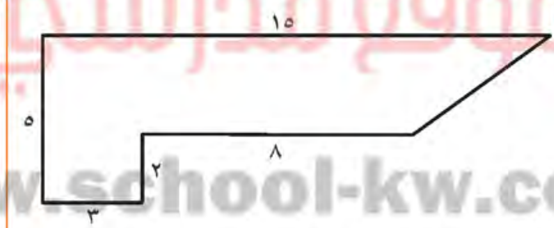


حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق² × ع = $\frac{١}{٣}$ × ٣,١٤ × ٢,٥ × ٢,٥ × ٦

= ٦,٢٨ × ٦,٢٥ = ٣٩,٢٥

٣ أوجد مساحة الأشكال غير المنتظمة المرسومة .

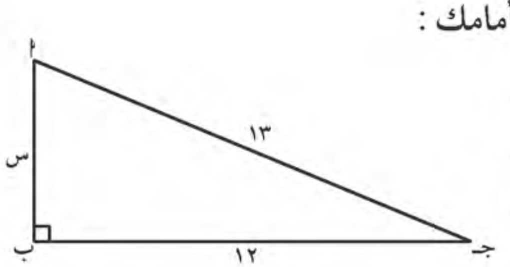
أ



ب

(اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

٤ أوجد طول ضلع القائمة في المثلث أ ب جـ المرسوم أمامك :



(أ ب)² = (أ جـ)² − (جـ ب)²

س² = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

س = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

٥ أثبت أنَّ Δ أ ب جـ قائم الزاوية ، حيث أ ب = ٧ وحدة طول ، أ جـ = ٢٤ وحدة طول ، ب جـ = ٢٥ وحدة طول .

$(ب جـ)^2 = ٢٥ \times ٢٥ = ٦٢٥$

$(أ جـ)^2 + (أ ب)^2 = (٢٤)^2 + (٧)^2 = ٥٧٦ + ٤٩ = ٦٢٥$

$(ب جـ)^2 = أ جـ^2 + أ ب^2$ Δ أ ب جـ مثلث قائم

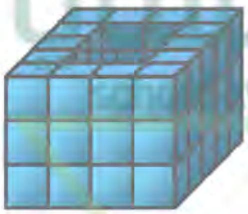
---

٦ إذا كان المستطيلان المرسومان وجهين لصندوق واحد ، فكم يكون حجم هذا الصندوق ؟

(أ) ٩٦٠ سم^3
(ب) ٦٢٠ سم^3
(جـ) ٢٤٠ سم^3
(د) ٦٠ سم^3

---

٧ الشكل المقابل مكون من مكعبات جميعها من نفس الحجم وتوجد فتحة في منتصف الشكل ، فكم عدد المكعبات اللازمة لتعبئة الفتحة ؟



(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٥ (د) ١٨

---

٨ إذا كان حجم مكعب وحجم أسطوانة متساويين وكان طول حرف المكعب وطول نصف قطر قاعدة الأسطوانة كلٌّ منهما يساوي ٦ سم ، فأي من القياسات الآتية هو الأقرب لأن يكون ارتفاعًا لهذه الأسطوانة ؟

(أ) ١ سم (ب) ٢ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

---

٩ يملك أحمد مزرعة على شكل مستطيل محيطه يساوي ٦٢ متر ، إذا كان طول الحديقة يزيد عن عرضها بـ ٥ أمتار ، فما طول وعرض هذه الحديقة ؟

الطول يساوي : ١٨ م عرض الحديقة س طولها س+٥

العرض يساوي : ١٣ م محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

$٦٢ = ٢(س + ٥ + س)$

$٦٢ = ١٠ + ٤س$

$س = \frac{٥٢}{٤} = ١٣$

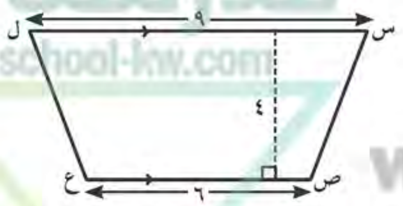
اختبار الوحدة الحادية عشرة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ حجم أسطوانة طول نصف قطرها ٧ وحدة طول وارتفاعها ٥ وحدة طول يساوي ١١٠ وحدة مكعبة .	أ	ب
٢ المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ وحدة طول ، ٦ وحدة طول ، ٥ وحدة طول مثلث قائم الزاوية .	أ	ب
٣ مساحة المنطقة المظلّلة في الرسم المقابل تساوي $١\frac{٤}{٧}$ وحدة مربعة . 	أ	ب
٤ إذا كان حجم أسطوانة دائرية يساوي ٩٩ وحدة مكعبة ، فإنَّ حجم المخروط المشترك معها بالقاعدة والارتفاع يساوي ٣٣ وحدة مكعبة .	أ	ب

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ مساحة شبه المنحرف س ص ع ل المرسوم تساوي :



(أ) ٣٠ وحدة مربعة (ب) ٦٠ وحدة مربعة

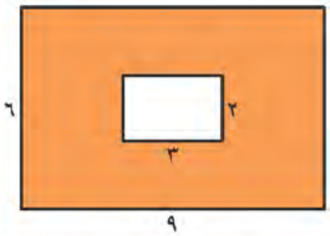
(جـ) ١٩ وحدة مربعة (د) ٤٢ وحدة مربعة

TIMSS 2019

٦ صفيحة فارغة على شكل مكعب ، صب فيها الماء بمعدل ٢٠٠ سم^{٣} في الدقيقة فامتلأت بعد ٤٠ دقيقة ، فإنَّ طول ضلع المكعب يساوي :

(أ) ٨٠٠ سم (ب) ٢٠٠ سم (جـ) ٤٠ سم (د) ٢٠ سم

٧ مساحة المنطقة المظلّلة تساوي :



(أ) ٧٠ وحدة مربعة (ب) ٦٠ وحدة مربعة
(جـ) ٥٤ وحدة مربعة (د) ٤٨ وحدة مربعة

---

٨ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ١٥ وحدة طول وارتفاعها ٣ وحدة طول ،
فإنَّ مساحة السطح المنحني فقط تساوي :

(أ) ٧٠ وحدة مربعة (ب) ٤٥ وحدة مربعة (جـ) ١٨ وحدة مربعة (د) ٤٤١ وحدة مربعة

---

٩ علبة بدون غطاء على شكل مكعب طول ضلعه س ، فإنَّ المساحة السطحية للعلبة تساوي :

(أ) ٤ $س^{٢}$ (ب) ٥ $س^{٢}$ (جـ) ٦ $س^{٢}$ (د) $س^{٢}$

---

١٠ إذا كانت مساحة قاعدة الهرم الرباعي تساوي ٢٥ وحدة مربعة ومساحة أحد الأوجه المثلثة ١٥ وحدة مربعة ، فإنَّ مساحة الهرم السطحية تساوي :

(أ) ٨٥ وحدة مربعة (ب) ٤٠ وحدة مربعة (جـ) ٦٠ وحدة مربعة (د) ٧٠ وحدة مربعة

الوحدة الثانية عشرة

الاحتمال
Probability

عالم المرح
World of Fun

مشروع الوحدة :
(تصميم لعبة)

تساعد الألعاب على دخول البهجة والسرور إلى صدر المشترك عند معرفة فرص فوزه . فمثلًا لعب الاحتمالات تساعد على المرح واللعب في الحياة . وعند ممارسة الإنسان لهذه الألعاب فإنّه يشعر بالسعادة فيؤثر ذلك إيجابيًّا على جميع نواحي حياته .

خطة العمل : تصميم لعبة على شكل دوّارة :

- ستقوم كل مجموعة بتصميم دوارة تعتمد على مبادئ الاحتمال برسم عدد من القطاعات الدائرية المميزة (برقم ، حرف ، لون ، شكل ، ....) .

خطوات تنفيذ المشروع :

- حدد قوانين اللعبة الدوّارة .
- أوجد فضاء العينة للدوارة التي رسمت عند كل مجموعة .
- أوجد احتمالات وقوف المؤشر عند أي قطاع دائري .

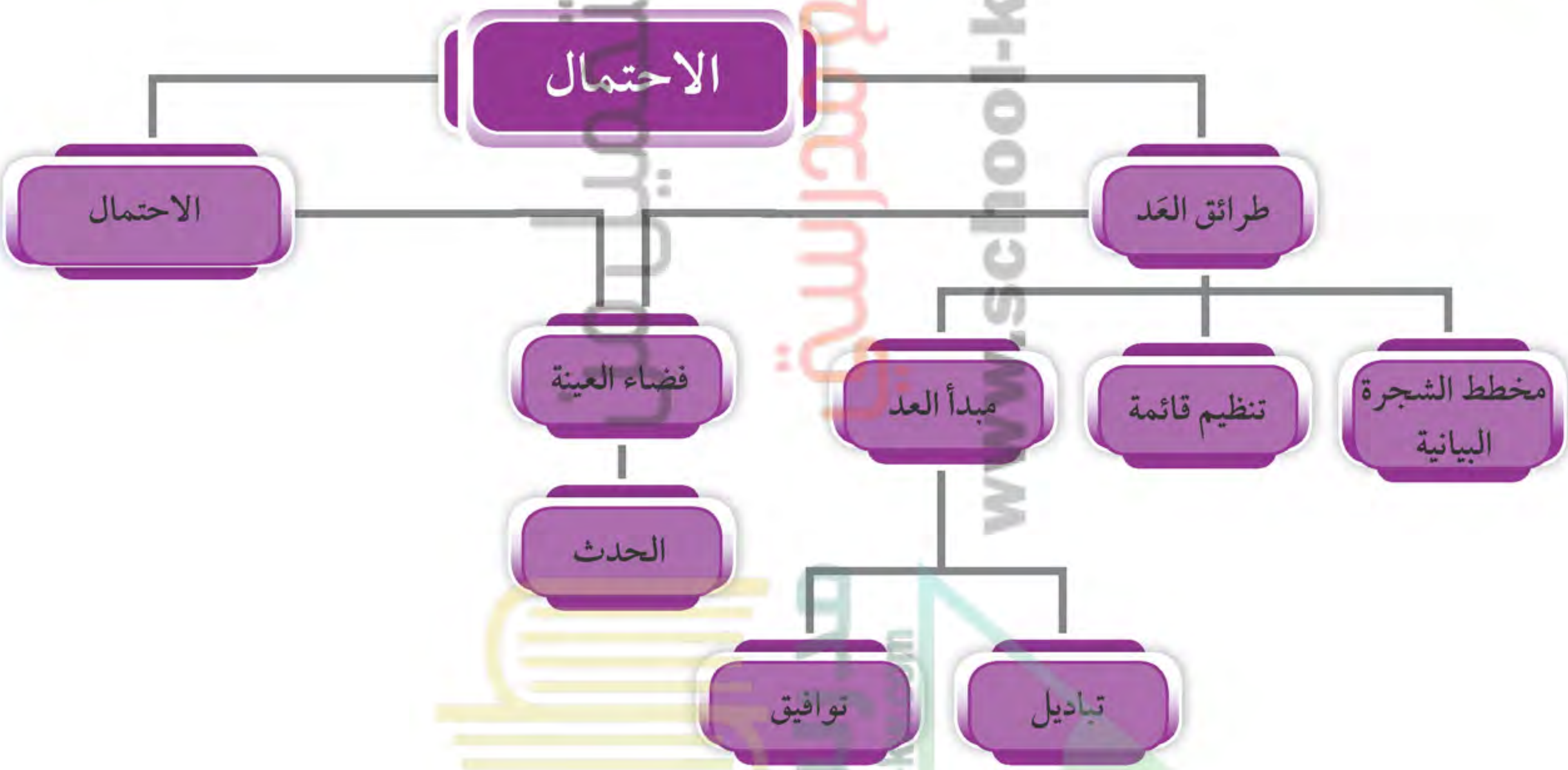
علاقات وتواصل :

- تلعب المجموعات .
- تبادل الدّوّارات بين المجموعات للعب .
- حدّد مواصفات التقييم ومدى جودة اللعبة (العدالة – التصميم – الأدوات) .

عرض العمل :

- اعرض وناقش اللعبة الأفضل جودة (العدالة – التصميم) .

مخطّط تنظيمي للوحدة الثانية عشرة



١٢-١ طرائق العد
Counting Methods

سوف تتعلّم : مخطط الشجرة البيانية – تنظيم قائمة – مبدأ العد – التباديل – التوافيق .

العبارات والمفردات :

مخطّط الشجرة البيانية
Tree Diagram

مبدأ العد
Counting Principle

تنظيم قائمة
Organizing a list

ترتيب
Arragement

تباديل
Permutation

مضروب
Factorial

توافيق
Combination

(١) مبدأ العد

نشاط (١) :

زار خالد المدينة الترفيهية ، وعند دخوله حصل على هدية عبارة عن تذاكر مجانية للعبتين من أصل أربع لعب متاحة ومختلفة .

فإذا كانت اللعب الأربع هي : الإعصار ، الدردور ، البرق ، السندباد .

فبكم طريقة يستطيع خالد اختيار اللعبتين المتاحتين له بشرط عدم تكرار اللعبة ؟

يمكن التوصل إلى عدد طرائق اختيار خالد للعبتين متاحتين له بعدة طرق منها :

(أ) القائمة المنظمة

اللعبة الأولى	اللعبة الثانية
الإعصار	الدردور
الإعصار	البرق
الإعصار	السندباد
الدردور	الاعصار
الدردور	البرق
الدردور	السندباد
البرق	الإعصار
البرق	الدردور
البرق	السندباد
السندباد	الإعصار
السندباد	الدردور
السندباد	البرق

(ب) مخطط الشجرة البيانية

اللعبة الأولى	اللعبة الثانية
الإعصار	الدردور
	البرق
	السندباد
الدردور	الاعصار
	البرق
	السندباد
البرق	الإعصار
	الدردور
	السندباد
السندباد	الاعصار
	الدردور
	البرق

معلومات مفيدة :
يستخدم علماء الأحياء مخطّطات الشجرة البيانية لتحليل ما قد يحدث في أجيال مختلفة من الكائنات الحية .

لاحظ أنَّ :

عدد طرق اختيار خالد للعبة الأولى هو ٤ طرق ، وعدد طرق اختياره للعبة الثانية هو ٣ طرق وبذلك يستطيع اختيار لعبتين بـ ١٢ طريقة مختلفة .

ويمكن أيضًا التوصل لعدد طرق اختيار خالد للعبتين متاحتين له بطريقة أخرى وهي :

عدد الطرق = عدد طرق اختيار اللعبة الأولى × عدد طرق اختيار اللعبة الثانية

= ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

هذه الطريقة تسمى « **مبدأ العد** » ويفضّل العمل بها إذا كان التمثيل بالقائمة المنظمة أو بالشجرة البيانية فيه صعوبة لكثرة البيانات المستخدمة وتعددها .

مبدأ العد : هو عملية تتكون من خطوتين مستقلتين ، إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $ن_1$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية $ن_2$ ، فإنَّ عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية هو :

$ن_1 \times ن_2$. ويمكن تعميم المبدأ لأكثر من خطوتين .

تدرّب (١) :

يقدم مطعم وجبات من طبق رئيسي إما لحم أو سمك أو دجاج ، وكل طبق رئيسي يقدّم معه مقبلات من حساء أو سلطة .

أ أكمل مخطط الشجرة البيانية لتبين الوجبات الممكن تقديمها .

الأطباق	المقبلات	الوجبات
لحم	حساء	(لحم ، حساء)
	سلطة	(لحم ، سلطة)
....	حساء	(سمك ، حساء)
	سلطة	(سمك ، سلطة)
دجاج	حساء	(دجاج ، حساء)
	سلطة	(دجاج ، سلطة)

ب كم عدد الوجبات التي يمكن تقديمها ؟

عدد الوجبات = ٣ × ٢ = ٦ وجبات

معلومات مفيدة :
تستخدم التباديل عند ترتيب مجموعة مختارة من الصور الفوتوغرافية في ألبوم حسب ترتيب الأحداث .

(٢) التباديل والترتيبات

١ ٢ ٣ ٤

نشاط (٢) :

أراد خالد التعرف على جميع الأعداد والتي يتكون كل منها من رقمين فقط من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

على ألا يسمح بتكرار الرقم في العدد ، فهل تستطيع أن تساعده في أكمال مخطط الشجرة التالي ؟

الرقم الأول (رقم الآحاد)	الرقم الثاني (رقم العشرات)	الأعداد الممكنة
١	٢	١ ٢
	٣	١ ٣
	٤	١ ٤
٢	١	٢ ١
	٣	٢ ٣
	٤	٢ ٤
٣	١	٣ ١
	٢	٣ ٢
	٤	٣ ٤
٤	١	٤ ١
	٢	٤ ٢
	٣	٤ ٣

توجد ١٢ طريقة ممكنة لاختيار الرقمين المسموح بهما لنكون بهما العدد أي أن
عدد الطرائق = عدد طرق اختيار الرقم الأول × عدد طرق اختيار الرقم الثاني
= ٤ × ٣ = ١٢

لاحظ أن : عند تبديل الرقمين ١ ، ٢ مثلًا حصلنا على العددين (٢١) ، (١٢) لذلك يكون الترتيب هنا مهم ، وتسمى كلًّا منهما **ترتيبة** .

مما سبق عندما يكون **ترتيب العناصر** مهمًا دون تكرار نسمي هذا الاختيار **تبديلًا** ونرمز له بالرمز (ل) .

من النشاط السابق :

استطعنا مع خالد أن نحصل على ١٢ طريقة (تبديلة) لنكوّن العدد المطلوب عند اختيار عنصران مختلفان من ٤ عناصر دون تكرار ومراعاة الترتيب فيهما ويمكننا كتابة ذلك على **الصورة الرمزية** :

$$^{٤}ل_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$$

عدد عناصر المجموعة

عدد العناصر التي تم اختيارها

أ ما هو عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٣ عناصر من { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } لنكوّن بها أعدادًا من ثلاث أرقام ؟

منازل العدد	آحاد	عشرات	مئات
عدد طرق الاختيار	٤	٣	٢

عدد التبديلات = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ تبديلة

$^{٤}ل_{٣} = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$

عدد عناصر المجموعة

عدد العناصر

ب ما هي عدد التبديلات الممكنة لاختيار ٤ عناصر من {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } لنكون بها أعدادًا من أربعة منازل ؟

عدد التبديلات = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ تبديلة = $^{٤}ل_{٤}$

- هل لاحظت نمطًا معينًا في عمليات الضرب السابقة ؟
- عملية الضرب على الصورة ٤ × ٣ × ٢ × ١ (العوامل تتناقص بمقدار ١ ، وتنتهي بالعدد ١) يمكن كتابتها على الصور **(٤!)** وتقرأ **(مضروب ٤)**

مضروب العدد : اختيار (ن) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له بالرمز ن! ويكتب على الصورة :

$$ن! = ن(ن-١)(ن-٢) \ldots \times ٢ \times ١ = {}^{ن}ل_{ن} ، ن \in ص_{+}$$

أيضًا يمكننا كتابة $^{٤}ل_{٢}$ على الصورة : $^{٤}ل_{٢} = \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{٤!}{٢!}$

فمثلًا : $^{٥}ل_{٢} = ٥ \times ٤ = \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٥!}{٣!} = \frac{٥!}{(٥-٢)!} = ٢٠$

التبديلة

في صورة مفكوك

في صورة مضروب

قيمة التبديلة

التباديل : عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف (م ≤ ن) ومن دون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم سنرمز له برمز التبديلة ($^{ن}ل_{م}$) ويكتب على الصورة :

(١) $^{ن}ل_{م}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) ... إلى م من العوامل.

(٢) $^{ن}ل_{م} = \frac{ن\,!}{(ن - م)\,!}$ ، ن ، م ∈ $ص_{+}$

تدرّب (٢) :

أوجد كل من :

أ) ٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

ب) ٤ ! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

جـ) ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧ !

د) $^{٥}ل_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

هـ) $^{٩}ل_{٢}$ = ٩ × ٨ = ٧٢

و) ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = $^{٨}ل_{٤}$

ز) (١٠ − ٧) ! = ٣ ! = ٣ × ٢ × ١ = ٦

تدرّب (٣) :

تستخدم إحدى المدن لوحات ترخيص الدرجات والتي تحتوي على عدد مكوّن من ٣ أرقام مختلفة للوحة ، (وباستخدام الأرقام من ١ إلى ٩) يريد المدير المسؤول عن تنظيم الدراجات أن يعرف عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها .

الحل : عدد طرق اختيار الرقم الأول (الآحاد) = ٩ طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثاني (العشرات) = ٨ طرق

عدد طرق اختيار الرقم الثالث (المئات) = ٧ طرق

منازل العدد	آحاد	عشرات	مئات
عدد طرق الاختيار	٩	٨	٧

عدد لوحات التراخيص = ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤

حل آخر : ∵ ترتيب العناصر مهم ، وبدون تكرار فإن :

عدد لوحات التراخيص = $^{٩}ل_{٣}$ = ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤

مثال :

في تدرّب (٣) ، إذا سمح المدير المسؤول بتكرار الرقم ، فكم عدد لوحات التراخيص التي يمكن إصدارها ؟

الحل : ∵ ترتيب العناصر مهم ، ومسموح بالتكرار فإن :

عدد لوحات التراخيص = ٩ × ٩ × ٩ = ٧٢٩ لوحة

فكّر وناقش

عرض المعلم المثال التالي : كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ في حالة السماح بتكرار الأرقام .

وليد يرى أنّ حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = ٢٥٦ طريقة

جاسم يرى أنّ حل المثال هو : عدد الطرق الممكنة = ٤ × ٤ × ٤ × ٣ = ١٩٢ طريقة

فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك .

لاحظ أنَّ :

(١) ٠! = ١

(٢) ١! = ١

(٣) ن! = ن × (ن − ١)! حيث ن ∈ $ص_+$

فمثلًا : ٥! = ٥ × ٤!

= ٥ × ٤ × ٣!

= ٥ × ٤ × ٣ × ٢! وهكذا ...

تدرّب (٤) :

اختير ٥ طلاب للجنة الرياضية بفصلك ، على أن يتم اختيار رئيس ونائب رئيس ومقرر لهذه اللجنة من الطلاب الخمس ، فبكم طريقة يتم اختيار المرشحون للمناصب الثلاث ؟

عدد طرح اختيار المرشدون للمناصب الثلاث = $^{٥}ل_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة

(٣) التوافيق

نشاط (٣) :

معلومات مفيدة :
يختار المدربون التوافيق عندما يبدأون في تشكيل فريق .

أراد معلم الرياضة البدنية في مدرستك أن يستعين بك لتصمم معه جدول مباريات لفرق كرة القدم من فصول الصف الثامن من مجموعة الفرق { أ ، ب ، ج ، د } من دور واحد . **فهل تستطيع أن تساعده في إكمال مخطط الشجرة التالي لتصميم جدول المباريات ؟**

الفريق الأول	الفريق الثاني	المباريات الممكنة
أ	ب	أ ، ب
	ج	أ ، ج
	د	أ ، د
ب	أ	ب ، أ
	ج	ب ، ج
	د	ب ، د
ج	أ	ب ، أ
	ب	ج ، ب
	د	ج ، د
د	أ	د ، أ
	ب	د ، ب
	ج	د ، ج

أكمل ما يلي :

١ هل المباراة بين الفريقين أ ، ب هي نفسها المباراة ب ، أ ؟ نعم

٢ هل الترتيب مهم لإيجاد عدد المباريات ؟ كلا ولماذا ؟ لانه دور واحد

٣ أوجد عدد المباريات الممكنة = ٦ مباريات

مما سبق عندما يكون ترتيب العناصر غير مهم نسمي هذا الاختيار توافيق ونرمز له بالرمز (ق) .

• في النشاط السابق ، إن اختيار فريقين من أربعة فرق لا يحتاج إلى ترتيب ، أي أن ترتيب فريقين نعتبره اختيارا واحدًا .

لذلك نقسم عدد التباديل $^{٤}ل_{٢}$ على (٢ !) التي تمثل عدد المجموعات الثنائية المكررة أي أن :

$$^{\boxed{٤}}ق_{\boxed{٢}} = \frac{^{٤}ل_{٢}}{٢\,!} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$$

عدد عناصر المجموعة

عدد الاختيارات

التوافيق : عند اختيار (م) عنصر من بين (ن) عنصر مختلف (م ≤ ن) حيث ترتيب العناصر غير مهم سنرمز له برمز التوفيقة ($^{ن}ق_{م}$) وتكتب على الصورة :

$$^{ن}ق_{م} = \frac{^{ن}ل_{م}}{م\,!} \quad ن \text{ ، } م \in ص_{+}$$

إذا كان $^{ن}ل_{م} = \frac{ن\,!}{(ن-م)\,!}$ ، فإن $^{ن}ق_{م} = \frac{ن\,!}{م\,! \times (ن-م)\,!}$

ملاحظة :
عندما تتحقق من إجابتك عن مسألة ما تتضمن توافيق ، تأكد من إلغاء الإمكانيات التي هي عبارة عن تكرار لبعضها بعضًا .

تكتب التوافيق بصورة أخرى : $^{ن}ق_{م} = \binom{ن}{م}$ وتقرأ ن فوق م .

تدرّب (٥) :

في إحدى الاختبارات مطلوب الإجابة على سؤالين فقط من أربعة أسئلة متاحة ، فبكم طريقة يمكنك أن تختار سؤالين للإجابة ؟

نفرض أن أرقام الأسئلة هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فتكون طرق اختيار سؤالي الإجابة هي :
(نلاحظ أن اختيار السؤالين لا يهم فيهما الترتيب)

• الطريقة الأولى : (طريقة مخطط الشجرة)

السؤال الأول :		١			٢			٣			٤	
السؤال الثاني :	٢	٣	٤	١	٣	٤	١	٢	٤	١	٢	٣
سؤالي الإجابة :	١ ، ٢	١ ، ٣	١ ، ٤	٢ ، ١	٢ ، ٣	٢ ، ٤	٣ ، ١	٣ ، ٢	٣ ، ٤	٤ ، ١	٤ ، ٢	٤ ، ٣

∴ عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = ٦ طرق

• الطريقة الثانية : (طريقة المجموعات)

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الأول هي : { ١ ، ٢ } ، { ١ ، ٣ } ، { ١ ، ٤ }

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثاني (ما عدا السؤال الأول) هي : { ٢ ، ٣ } ، { ٢ ، ٤ }

• المجموعات التي تتضمن اختيار السؤال الثالث (ما عدا السؤالين الأول والثاني) هي : { ٣ ، ٤ }

عدد طرق اختيار سؤالي الإجابة = ٦ طرق

• الطريقة الثالثة : (بقانون التوافيق)

$$ {}^{٤}ق_{٢} = \frac{{}^{٤}ل_{٢}}{٢!} = \frac{\cancel{٤}^{٢} \times ٣}{\cancel{٢}_{١} \times ١} = ٦ \text{ أو } \binom{٤}{٢} = \frac{٤!}{٢! \times (٤ - ٢)!} = \frac{٤!}{٢! \times ٢!} $$

$$ = \frac{٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!} \times ٢!} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦ $$

تدرّب (٦) :

قرر ما إذا كان الترتيب ضروريًا أم لا في كل من المواقف التالية :

أ) اختيار ٤ اسطوانات مدمجة من ١٠ اسطوانات مدمجة . (................)

ب) اختيار أرقام لفتح التليفون المحمول . (................)

جـ) جلوس الطلاب في الفصل . (................)

د) اختيار وترتيب الحروف أ ، ب ، ج ، د من دون تكرار . (................)

تدرّب (٧) :

تقدم إحدى المطاعم أنواع من الفطائر حسب الطلب ، مما يلزم وضع خمسة أنواع من منكهات الطعام وهي (فلفل ، بصل ، طماطم ، تونة ، زيتون) . ما عدد الطرائق المختلفة :

أ) لاختيار اثنان من منكهات الطعام ؟ $ {}^{٥}ق_{٢} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} = ١٠ $ طرق

ب) لاختيار ثلاثة من منكهات الطعام ؟ $ {}^{٥}ق_{٣} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠ $ طرق

جـ اختيار خمسة من منكهات الطعام ؟ $^{٥}ق_{٥} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١$ طريقة

د لعدم اختيار أي نوع من منكهات الطعام ؟ $^{٥}ق_{٠} = ١$

فكِّر وناقِش

في تدرّب (٧) ، ماذا تلاحظ في إجابتك على كل من (أ) ، (ب) وأيضًا إجابتك على كل من (جـ) ، (د) ؟

تمـــرَّنْ :

١ **اِستخدم مبدأ العد لإيجاد عدد النواتج في كل حالة :**

أ ما عدد طرائق الاختيار لطلاء : من نوعين من الطلاء ، ٥ ألوان ؟

$٢ \times ٥ = ١٠$ طرق

ب ما عدد طرائق الاختيار لدراجة : من ٥ ألوان ، ٣ أحجام ، ٤ موديلات ؟

$٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$ طريقة

٢ **أوجد كل مما يلي :**

أ $٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

ب $(٨ - ٤)! = ٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

جـ $٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = {}^{٥}ل_{٥} = ٥!$

د $^{8}ل_{3}$ = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦

هـ ٠ ! = ١

و ٢! × ٣! = ٢ × ١ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢

ز ٤ × ٣ ! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

---

٣ كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من ١ إلى ٥ إذا كان :

أ يمكن تكرار الأرقام . $٥^{٤}$ = ٦٢٥

ب لا يمكن تكرار الأرقام . $^{٥}ل_{٤}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠

---

٤ في مزرعة أرانب يلزم وضع ٦ أرانب في ٦ أقفاص . بكم طريقة يمكن عمل ذلك بحيث يكون أرنب واحد في كل قفص؟

٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة

---

٥ كم عدد الطرائق التي يمكن أن يتم بواسطتها اختيار طالبين مع مراعاة الترتيب أو أن يكون واحدًا تلو الآخر من ٨ طلاب؟

٨ × ٧ = ٥٦ طريقة

٦ أوجد ما يساويه كل من :

أ $^{٨}ق_{٨} = \frac{٨!}{٠! \times ٨!} = ١$

ب $\binom{٧}{٠} = {}^{٧}ق_{٠} = \frac{٧!}{٠! \times ٧!} = ١$

جـ $^{٨}ق_{٥} = \frac{٨!}{٣! \times ٥!} = ٥٦$

د $^{٧}ق_{١} = \frac{٧!}{٦! \times ١!} = ٧$

٧ ذهبت مع أصدقائك إلى مطعم صيني يقدم ٦ أطباق . فبكم طريقة يمكنك اختيار ٣ من هذه الأطباق للمشاركة مع أصدقائك؟

$^{٦}ق_{٣} = \frac{٦!}{٣! \times ٣!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠$ طريقة

٨ في لعبة الكراسي الموسيقية يقوم جاسم وخالد ومحمد بالجري للجلوس على مقعدين ، أوجد عدد الطرائق المختلفة للجلوس على المقعدين .

$^{٣}ق_{٢} = \frac{٣!}{١! \times ٢!} = \frac{٣ \times ٢!}{١ \times ٢!} = ٣$

٩ ما هي عدد الطرائق المختلفة لقراءة كتابين من ٥ كتب خلال إجازة نهاية الأسبوع ؟

$^{٥}ق_{٢} = \frac{٥!}{٣! \times ٢!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣! \times ٢ \times ١} = ١٠$ طرق

١٢-٢ فضاء العينة
Sample Space

العبارات والمفردات :
فضاء العينة
Sample Space

سوف تتعلّم : إيجاد فضاء العينة .

نشاط (١) :

يمكن لرواد أحد المطاعم اختيار وجبة طعام تتكون من طبق رئيسي ومقبلات وحلوى من بين عدة خيارات موضحة في قائمة الطعام المقابلة .

أجب عن الأسئلة التالية من خلال قائمة الطعام الموضحة أمامك :

١ ما عدد خيارات المقبلات ؟ ١

٢ ما عدد خيارات الطبق الرئيسي ؟ ٣

٣ ما عدد خيارات الحلوى ؟ ٢

٤ ما عدد الوجبات الممكنة التي يُقدمها المطعم ؟ ٦ وجبات

إنَّ مجموعة كل النواتج الممكنة عند إجراء تجربة عشوائية تسمى فضاء العينة (ف) .

ص ك

مثلًا : عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإنَّ :

كل النواتج الممكنة هي ظهور صورة (ص)

أو ظهور كتابة (ك) ويكون فضاء العينة هو { ص ، ك } ،

وعدد النواتج يساوي ٢

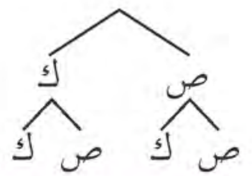
تدرّب (١) :

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وحدد عدد النواتج .

أ أكمل الجدول لتبين كل النواتج الممكنة :

الرمية الأولى / الرمية الثانية	ص	ك
ص	ص ، ص	ك ، ص
ك	ص ، ك	ك ، ك

ب فضاء العينة (ف) = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ،
(ك ، ص) ، (ك ، ك) }



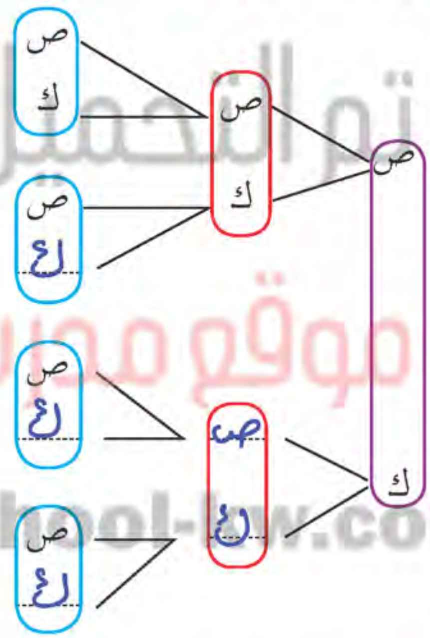
جـ عدد النواتج = ٢ × ٢ = ٤

تدرّب (٢) :

اكتب فضاء العينة لتجربة رمي ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة وحدد عدد النواتج .

تذكَّرْ أنّ : متمايز تعني مختلفة من حيث اللون والشكل والحجم .

أ أكمل مخطط الشجرة لتبين كل النواتج الممكنة :



(ص ، ص ، ص)
(ص ، ص ، ك)
(ص ، ك ، ص)
(ص ، ك ، ك)
(ك ، ص ، ص)
(ك ، ص ، ك)
(ك ، ك ، ص)
(ك ، ك ، ك)

ب فضاء العينة = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ،
(ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ،
(ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

جـ عدد النواتج ٨

د عدد الاختيارات باستخدام مبدأ العد = ٢ × ٢ × ٢ = $(٢)^٣$ = ٨

فكِّر وناقش

هل عدد النواتج الممكنة لرمي قطعة نقود أربع مرات متتالية يساوي عدد النواتج الممكنة لرمي أربع قطع نقود متمايزة مرة واحدة ؟ وضح ذلك .

تدرّب (٣) :

يمكنك أن تختار شطيرة من بين ثلاثة أنواع من الشطائر (دجاج ، لحم ، سمك) للغداء ، وعصيرًا من بين ثلاثة أنواع من العصير (برتقال ، مانجو ، فراولة) .

اكتب فضاء العينة ، ثم أوجد عدد الطرائق الممكنة التي يمكن أن تحصل عليها .

ف = { (دجاج ، برتقال) ، (دجاج ، مانجو) ، (دجاج ، فراولة)
(لحم ، برتقال) ، (لحم ، مانجو) ، (لحم ، فراولة) ، (سمك ، برتقال)
(سمك ، مانجو) ، (سمك ، فراولة) } عدد الطرق = ٣ × ٣ = ٩

الحدث (الحادثة) هو : مجموعة جزئية من فضاء العينة (ف) .

تدرّب (٤) :

صندوق فيه ثلاث كرات ألوانها هي : الأحمر (ح) ، البرتقالي (ب) ، الأزرق (ز) .
إذا سحبت من الصندوق كرة عشوائيًا ثم أعدتها ، وسحبت كرة مرة أخرى عشوائيًا .

١ أكمل لكتابة فضاء العينة (ف) .

الكرة	ح	ب	ز
ح	(ح ، ح)	(ح ، ب)	(ح ، ز)
ب	(ب ، ح)	(ب ، ب)	(ب ، ز)
ز	(ز ، ح)	(ز ، ب)	(ز ، ز)

٢ أي الأحداث التالية (مؤكد - مستحيل - بسيط - مركب) ؟

أ سحبت كرتين الأولى حمراء والأخرى برتقالية اللون . بسيط

ب سحبت كرة حمراء اللون وكرة حمراء . بسيط

جـ سحبت كرة برتقالية اللون وكرة صفراء . مستحيل

د سحبت كرتين من اللون نفسه . مركب

هـ سحبت كرة حمراء اللون وكرة سوداء اللون . مستحيل

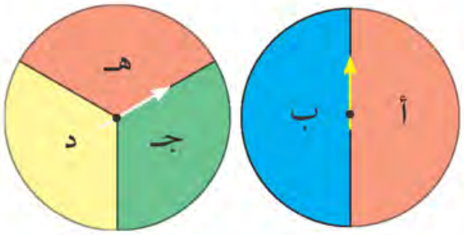
تذكّر أنّ :
- **الحدث المؤكد :** هو الحدث الذي يقع دائمًا عند إجراء التجربة العشوائية .
- **الحدث المستحيل :** هو الحدث الذي لا يقع أبدًا عند إجراء التجربة العشوائية .
- **الحدث البسيط :** هو الحدث الذي يتكون من ناتج واحد فقط من نواتج تجربة الاحتمال .
- **الحدث المركب :** هو الحدث الذي يتكون من ناتج أو أكثر من نواتج تجربة الاحتمال .

تمرّن :

١ اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد ثم إلقاء قطعة نقود .

ف = { (١، ص) ، (١، ك) ، (٢، ص) ، (٢، ك)
(٣، ص) ، (٣، ك) ، (٤، ص) ، (٤، ك)
(٥، ك) ، (٥، ص) ، (٦، ك) ، (٦، ص) }

٢ تم تدوير الدوارتين المقابلتين معًا . اكتب فضاء العينة وحدد عدد النواتج الممكنة .



ف = { (أ، هـ) ، (أ، جـ) ، (أ، د) ، (ب، هـ) ، (ب، جـ) ، (ب، د) }

عدد النواتج = ٢ × ٣ = ٦

٣ اختار جاسم الأرقام التالية : ١ ، ٢ ، ٣

ارسم مخطّط الشجرة البيانية لتبين كل الأعداد المؤلفة من رقمين مختلفين التي تختارها من بين هذه الأرقام .

١ ← ١٢ ، ١٣

٢ ← ٢١ ، ٢٣

٣ ← ٣١ ، ٣٢

٤ يريد أحمد أن يقوم برحلة عبر النهر .

يوجد نوعان من المراكب (أ) ، (ب) كما في الصورة ليختار بينهما ويختار من بين ثلاثة جداول مائية صغيرة في ثلاثة اتّجاهات مختلفة : س أو ص أو ع .

(ب) (أ)

أ اصنع مخطط الشجرة البيانية لكل النواتج الممكنة .

أ ← س ، ص ، ع

ب ← س ، ص ، ع

ب ما فضاء العينة لرحلة أحمد ؟

ف = { (أ، س) ، (أ، ص) ، (أ، ع) ، (ب، س) ، (ب، ص) ، (ب، ع) }

جـ أوجد عدد النواتج الممكنة .

٢ × ٣ = ٦

١٢-٣ الاحتمال
Probability

سوف تتعلّم : احتمال وقوع الحدث - الاحتمال الهندسي .

معلومات مفيدة :
يستخدم علماء الجيولوجيا (علم طبقات الأرض) الاحتمال لوصف إمكانية حدوث زلزال بالخطأ خلال عدد معين من السنوات.

نشاط :

أراد مبارك أن يدخل في لعبة ويجرب حظه في هذه اللعبة ، فاختار حجر نرد ورماه وحدّد ظهور عدد زوجي لدخوله اللعبة .

ساعد مبارك لمعرفة هل يدخل إلى هذه اللعبة أم لا بإكمال ما يلي :

أ) عناصر فضاء العينة = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، عددها ٦

ب) عناصر الحدث ظهور «عدد زوجي» = {٢، ٤، ٦} ، عددها ٣

جـ) نسبة عدد عناصر الحدث « ظهور عدد زوجي » إلى عدد عناصر فضاء العينة = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

د) النسبة المئوية لدخوله إلى اللعبة المختارة = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠٪ = ٥٠٪

إنَّ احتمال وقوع حدث ما يقارن عدد الطرائق التي يمكن أن يقع فيها هذا الحدث بعدد النواتج الممكنة بحيث يعبر عن الاحتمال بكسر اعتيادي كالتالي :

احتمال وقوع (حدث أ) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ف}}$ ⟸ ل (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$

يرمز لاحتمال وقوع (حدث) بالرمز ل (حدث) .

تذكَّرْ أنّ :
- عند تحويل كسر اعتيادي إلى كسر عشري ، اقسم البسط على المقام .
- الحدث (الحادثة) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .
- يمكن التعبير عن الاحتمال أيضًا في صورة نسبة مئوية أو كسر عشري أو نسبة .

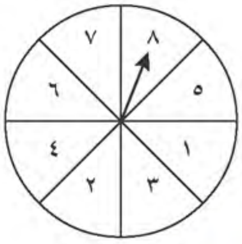
لاحظ أنَّ :

(١) احتمال فضاء العينة (الحدث المؤكد) = ١ أي أنّ ل (ف) = ١

(٢) احتمال الحدث المستحيل = صفر أي أنّ ل (∅) = ٠

تدرّب (١) :

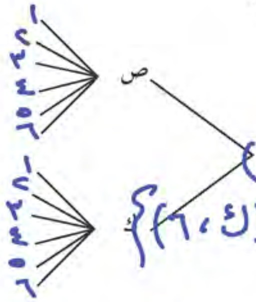
يلعب حسن وعلي لعبة القرص الدوار المبين بالشكل بحيث يربح حسن الجائزة إذا وقف المؤشر على عدد فردي ، ويربح علي الجائزة إذا وقف المؤشر على عدد زوجي من برأيك فرصته أكبر للفوز ؟ فسّر إجابتك. تتساوى فرص الربح لأن عدد الاعداد الفردية مساوية للاعداد الزوجية



تدرّب (٢) :

إذا تم رمي قطعة نقود معدنية وحجر نرد معًا مرة واحدة .

أ أكمل مخطط الشجرة واكتب فضاء العينة .



ف = {(ص، ١) ، (ص، ٢) ، (ص، ٣) ، (ص، ٤) ، (ص، ٥) ، (ص، ٦) ، (ك، ١) ، (ك، ٢) ، (ك، ٣) ، (ك، ٤) ، (ك، ٥) ، (ك، ٦)}

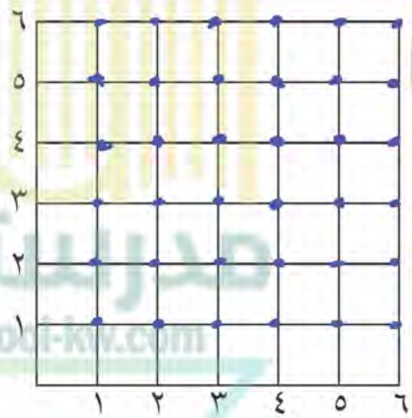
ب نفرض أن ج حدث ظهور صورة وعدد زوجي .

ج = { (ص ، ٢) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٦) }

عدد عناصر ج = ٣ ، عدد عناصر ف = ١٢ ،

∴ احتمال ظهور صورة و عدد زوجي = $\frac{\text{عدد عناصر ج}}{\text{عدد عناصر ف}}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

تدرّب (٣) :



في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين ،

مستعينًا بالشبكة المقابلة احسب الاحتمالات التالية :

أ ل (مجموع العددين الظاهرين أقل من ٥) ؟

نفرض أنَّ أ حدث «مجموع العددين الظاهرين أقل من ٥»

∴ أ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) }

عدد عناصر أ = ٦ ، عدد عناصر ف = ٣٦

∴ ل (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$ = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ملاحظة :

القاء حجري نرد متمايزين هو نفسه القاء حجر نرد مرتين متتاليتين .

ب ل (ظهور العدد ٥ في الحجر الأول والعدد ٤ في الحجر الثاني)؟

نفرض أنَّ ب حدث «ظهور العدد ٥ في الحجر الأول وظهور ٤ في الحجر الثاني»

ب = {(٥ ، ٤)}

عدد عناصر ب = ١ ، عدد عناصر ف = ٣٦

∴ ل (ب) = $\frac{١}{٣٦}$

ج ل (مجموع العددين الظاهرين ٩ أو ١٢) ؟

{(٣، ٦) ، (٤، ٥) ، (٥، ٤) ، (٦، ٦) ، (٦، ٣)} ل = $\frac{٥}{٣٦}$

د ل (مجموع العددين الظاهرين ١٣) ؟

ل = صفر

تدرّب (٤) :

صندوق فيه ٩ كرات متماثلة تمامًا مرقمة من ١ إلى ٩ . سحبت كرة عشوائيًّا من الصندوق . أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

١ أ « ظهور عدد أصغر من ٤ » . ل = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

٢ ب « ظهور عدد فردي » . ل = $\frac{٥}{٩}$

٣ جـ « ظهور عدد أصغر من ٤ أو ظهور عدد فردي » .
ل (ج) = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

تذكّرْ أنّ :
- مساحة المستطيل = ل × ض
- مساحة المربع = ل × ل
- مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ق × ع
- مساحة الدائرة = π نق^{٢}

تمــرَّنْ :

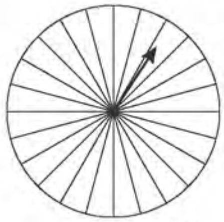
١ TIMSS 2019 هناك ١٠ أزرار باللون الأحمر و ٤ باللون الأزرق و ٨ باللون الأبيض في حقيبة ، ما هي فرصة استخراج الزر الأزرق أو الأبيض؟

(أ) $\frac{٤}{٢٢}$ (ب) $\frac{٨}{٢٢}$ (جـ) $\frac{١٠}{٢٢}$ (د) $\frac{١٢}{٢٢}$

٢ TIMSS 2019 اشتركت ٤ طالبات في مسابقة { شوق ، شمائل ، مريم ، شهد } وسيتم اختيار الترتيب بصورة عشوائية ، ما احتمال أن يتم اختيار طالبة يبدأ اسمها بحرف الـ شين ؟

(أ) ٢٥٪ (ب) ٥٠٪ (جـ) ٧٥٪ (د) ٩٠٪

٣ TIMSS 2019 يبين الشكل التالي مغزل دائري ب ٢٤ قطاع دائري . إذا أدار أحد الأشخاص السهم فإنه من المحتمل أن يقف السهم عند أي قطاع من القطاعات المرسومة ، إذا كان :



(أ) $\frac{١}{٨}$ من القطاعات زرقاء (ب) $\frac{١}{٢٤}$ منها بنفسجية

(جـ) $\frac{١}{٢}$ منها برتقالية (د) $\frac{١}{٣}$ منها حمراء

وأدار شخص السهم ، فأي لون من القطاعات سيكون له أقل احتمالية بأن يقف عنده السهم ؟ البنفسجية

٤ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ، وملاحظة العدد الظاهر على وجهه .
أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

أ ظهور عدد زوجي $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ب ظهور عدد أولي $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

جـ ظهور عدد أكبر من ٧ صفر

د ظهور عدد أصغر من ٦ $\frac{٥}{٦}$

٥ ثلاث بطاقات مرقمة بالأرقام ١ ، ٤ ، ٧ في كيس ورقي ، سحبت بطاقة واحدة بطريقة عشوائية ثم أعيدت وسحبت بطاقة مرة أخرى .

أ اكتب فضاء العينة .

ف = { (١،١) ، (١،٤) ، (١،٧) ، (٤،١) ، (٤،٤) ، (٤،٧) ، (٧،١) ، (٧،٤) ، (٧،٧) }

ب اكتب حدث ظهور عدد أولي في السحبة الأولى وعدد زوجي في السحبة الثانية .

{ (٧،٤) }

جـ احتمال حدث ظهور عدد أولي في السحبة الأولى وعدد زوجي في السحبة الثانية .

ل = $\frac{١}{٩}$

٦ ألقى سامي حجر نرد منتظمًا رميتين متتاليتين ، أوجد احتمال ظهور العدد ٦ في الرمية الأولى والعدد ١ في الرمية الثانية .

$\frac{١}{٣٦}$

٧ **في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرتين . أوجد احتمال كل من الأحداث التالية .**

أ أ « ظهور صورة في الرمية الأولى » .

ل(أ) = $\frac{١}{٢}$

ب ب « ظهور كتابة في الرمية الثانية » .

ل(ب) = $\frac{١}{٢}$

جـ جـ « ظهور صورة في الرمية الأولى أو ظهور كتابة في الرمية الثانية » .

ل(جـ) = $\frac{٣}{٤}$

٨ **عند تدوير القرص المجاور مرة واحدة . أوجد احتمال وقوف المؤشر عند كل من :**

أ احتمال الحصول على (الرقم ١ أو أصغر من ٨) .

$\frac{٧}{١٠}$

ب احتمال الحصول على (قطاع أصفر أو قطاع أبيض) .

$\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

جـ احتمال الحصول على (قطاع أحمر أو عدد فردي) .

$\frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

د احتمال الحصول على (مضاعف للعدد ٢ أو عدد يقبل القسمة على ٤) .

$\frac{٧}{١٠}$

هـ احتمال الحصول على (عدد أولي أو قطاع أبيض) .

$\frac{٦}{١٠}$

٩ في أحد معسكرات الشباب ٩ أشخاص من البحرين و ٨ أشخاص من الكويت ، ٧ أشخاص من السعودية . اختير من بينهم أحد الأشخاص عشوائيًا .
احسب احتمال أن يكون من السعودية أو من الكويت .

$\frac{١٥}{٢٤} = \frac{٥}{٨}$

TIMSS 2019 **١٠ في كيس يوجد ٢٥ كرة بألوان مختلفة : أحمر ، أصفر ، أزرق ، وأخضر .**
معطى أن عدد الكرات الحمراء مساو لعدد الكرات الزرقاء . احتمال إخراج كرة حمراء هو ٠,٢٨ واحتمال إخراج كرة خضراء هو ٠,٣٢

أ أكمل الجدول :

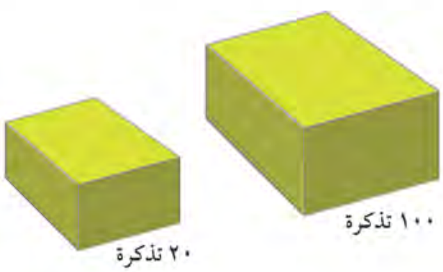
احتمال إخراج كرة حمراء	٠,٢٨
احتمال إخراج كرة صفراء	٠,١٢
احتمال إخراج كرة زرقاء	٠,٢٨
احتمال إخراج كرة خضراء	٠,٣٢

ب ما هو عدد الكرات الخضراء بالكيس؟

٢٥ × ٠,٣٢ = ٨ كرات

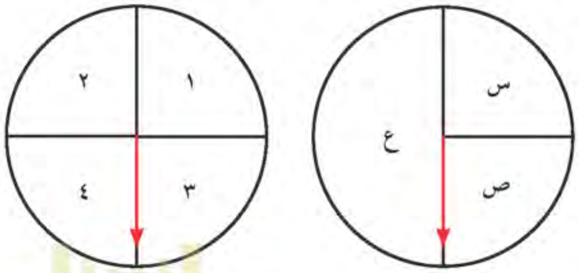
TIMSS 2019 **١١ تحتوي العلبة الأصغر على ٢٠ تذكرة مرقمة من ١ إلى ٢٠ . بينما تحتوي العلبة الأكبر على ١٠٠ تذكرة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ ، بدون النظر إلى التذاكر يمكنك سحب تذكرة واحدة من كل علبة . أي علبة يكثر فيها احتمال سحبك لتذكرة عليها الرقم ١٧ ؟**

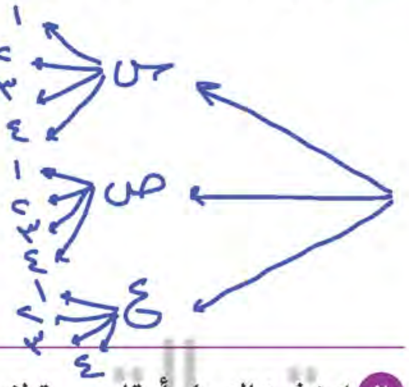
أ العلبة ذات التذاكر الـ ٢٠ .
ب العلبة ذات الـ ١٠٠ تذكرة .
ج العلبتان لهما نفس الاحتمال .
د من المستحيل معرفة ذلك .



مراجعة الوحدة الثانية عشرة
Revision Unit Twelve

١ ارسم مخطط الشجرة البيانية لتوضيح النواتج الممكنة لتدوير اللوحتين الدوارتين :





٢ اتخذ خالد ٤ أرقام سرية لفتح الحاسوب. إذا كان اختياره لأرقام مختلفة من ١ إلى ٦ ، فأوجد عدد الطرائق المختلفة في اختيار ذلك الرقم السري .

$ل^{٦}_{٤}$ = ٣٦٠ طريقة

٣ تألفت لجنة من ٤ طلاب في الصف الثامن البالغ عدده ٢٨ طالبًا. بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٤ طلاب مؤلفة من : رئيس ، نائب رئيس ، أمين سر ، أمين صندوق ؟

$ل^{٢٨}_{٤}$ = ٤٩١٤٠٠ طريقة

٤ عشرة من المخبرين السريين طلب رئيسهم ارسال اثنين منهم للقبض على أحد المشتبه فيهم ، ما عدد الطرائق المختلفة لإرسال اثنين منهم لإنجاز هذه المهمة ؟

$ق^{١٠}_{٢}$ = ٤٥ طريقة

٥ عند تدوير القرص المجاور مرة واحدة .

أوجد :

أ احتمال الحصول على (الرقم ١١ أو أكبر من ٢١) .

$\frac{٢}{٥}$

ب احتمال الحصول على (قطاع أزرق أو عدد يقبل القسمة على ٢٣) .

$\frac{٣}{٥}$

٦ عند رمي حجر نرد مرة واحدة ، وسحب كرة عشوائيًا من الكيس المجاور الذي فيه كرات . أوجد احتمال كل من :

أ ل (الحصول على ١ و كرة حمراء) $\frac{١}{٦} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٣٠}$

ب ل (الحصول على ٣ و كرة بنفسجية) $\frac{١}{٦} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٣٠}$

TIMSS 2019 **٧ عدد ركاب باص ٣٦ راكبًا ، نسبة الأطفال إلى الكبار في الباص ٥ إلى ٤**

أ ما هو عدد الأطفال في الباص ؟

$\frac{٥}{٩} \times ٣٦ = ٢٠$ طفل

ب إذا اخترنا بشكل عشوائي أحد الركاب في الباص . ما هو الاحتمال بأن يكون الراكب من الكبار ؟

$\frac{٤}{٩}$

اِختبار الوحدة الثانية عشرة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

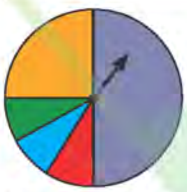
١ بعد الإعلان عن طلب وظائف ، تقدم ٨ أشخاص لوظيفة إدارية ، ٥ أشخاص للعمل على الحاسوب ، ٣ أشخاص مُبرمجي حاسوب . فإن عدد الطرائق المُختلفة لاختيار شخص واحد لكل وظيفة = ١٢٠ طريقة .	(أ)	(ب)
٢ $^{٥}ل_{٢} = ١٠$.	(أ)	(ب)
٣ عند رمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة . فإنَّ فضاء العينة يساوي ٦ .	(أ)	(ب)
٤ $^{٥}ق_{٢} = {}^{٥}ق_{٣}$.	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة ، فإنَّ احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي ٨ هو :

(أ) $\frac{٥}{٣٦}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٦}$ (د) ١

TIMSS 2019
٦ الدوارة هي لعبة محمود الجديدة ، من ٦٠٠ لفة كم مرة تقريبًا يجب أن يتوقع استقرار السهم على القطاع الأحمر ؟



(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (ج) ٥٠ (د) ٦٠

TIMSS 2019
٧ في الصف الثامن ٣٠ طالب ، احتمال اختيار طالب عشوائيًا بحيث يكون عمره أقل من ١٣ سنة هو $\frac{١}{٥}$. ما عدد طلاب الصف الذين تقل أعمارهم عن ١٣ سنة ؟

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

٨ عدد عناصر فضاء العينة عند تجربة رمي قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية يساوي :

(أ) ٢×٣ (ب) $٣^{٢}$ (ج) $٢^{٣}$ (د) $٢ + ٣$

TIMSS 2019

٩ يوجد ١٠ كرات زجاجية (بلي) في حقيبة : ٥ كرات حمراء و٥ كرات زرقاء .
قامت سلوى بسحب كرة من الحقيبة بشكل عشوائي لون الكرة المسحوبة أحمر ، ثم قامت سلوى بإعادة الكرة إلى الحقيبة مرة أخرى ، ما مدى احتمالية أن تكون الكرة المسحوبة في المرة القادمة بشكل عشوائي حمراء ؟

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٤}{١٠}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

---

١٠ ٥ × ٤ ! =

(أ) ٢٠ ! (ب) ٩ ! (جـ) ٥ ! (د) ٤٥ !